1309

Федеральное агенство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Липецкий государственный технический
университет"

Кафедра высшей математики

Типовой расчет
по векторному анализу

Составитель Ю.Д.Ермолаев

Липецк 2005

Оглавление

1. Построить линии уровня следующих скалярных полей

1.1. $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$

1.2. $\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1$

1.3. $\varphi = 2x^2 + 3y^2$

1.4. $\varphi = 5x^2 + 2y^2$

1.5. $\varphi = e^{-x^2 - y^2}$

1.6. $\varphi = 3xy + 2$

1.7. $\varphi = \dfrac{1}{xy}$

1.8. $\varphi = 2x + 3y + 4$

1.9. $\varphi = 3x - 2y + 1$

1.10. $\varphi = 4y - 3x + 4$

1. Построить векторные линии следующих векторных полей

1.11. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$

1.12. $\vec{a} = 2x\vec{i} - y\vec{j}$

1.13. $\vec{a} = -x\vec{i} + 2y\vec{j}$

1.14. $\vec{a} = -2x\vec{i} - 3y\vec{j}$

1.15. $\vec{a} = 4x\vec{i} + 2y\vec{j}$

1.16. $\vec{a} = 3x\vec{i} - 2y\vec{j}$

1.17. $\vec{a} = -x\vec{i} + 3y\vec{j}$

1.18. $\vec{a} = -2x\vec{i} - 5y\vec{j}$

1.19. $\vec{a} = 3x\vec{i} + 6y\vec{j}$

1.20. $\vec{a} = 2x\vec{i} - 3y\vec{j}$

2. Вычислить производную скалярного поля u по направлению от A к B

2.1. $u = x^2yz3$,
$A(1,1,1),\ B(2,3,4)$

2.2. $u = xy\sin(y - z)$,
$A(1,3,5),\ B(5,6,5)$

2.3. $u = x^3y^2 - yz^2$,
$A(2,3,1),\ B(4,4,6)$

2.4. $u = xe^{xyz}$,
$A(1,2,4),\ B(4,5,8)$

2.5. $u = xy + \ln(yz)$,
$A(0,1,1),\ B(2,1,2)$

2.6. $u = xe^{y}\cos z$,
$A(1,0,0),\ B(4,3,5)$

2.7. $u = \dfrac{xy}{x + z}$,
$A(2,1,1),\ B(7,6,5)$

2.8. $u = \ln(x + yz^2)$,
$A(2,2,2),\ B(1,3,5)$

2.9. $u = x^2y + y^2z + xz^2$,
$A(3,2,1),\ B(1,2,3)$

2.10. $u = \dfrac{x - y}{y - z} + xz$,
$A(3,3,3),\ B(5,6,7)$

2.11. $u = x\,\mathrm{tg}\,y + y\,\mathrm{ctg}\,z$,
$A(1,1,3),\ B(5,3,4)$

2.12. $u = xz + xy + yz$,
$A(1,2,5),\ B(9,8,7)$

2.13. $u = x + xy + xyz$,
$A(3,3,3),\ B(8,7,9)$

2.14. $u = xy(x+y+z)()$,
$A(0,0,0),\ B(6,8,9)$

2.15. $u = xyz\ln(xyz)$,
$A(2,3,4),\ B(5,6,7)$

2.16. $u = x^3 + y^3 - z^3$,
$A(3,2,3),\ B(6,5,7)$

2.17. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
$A(4,2,3),\ B(6,5,4)$

2.18. $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{z} +$,
$A(4,2,1),\ B(1,3,6)$

2.19. $u = x\,\mathrm{tg}(y^2+z^2)$,
$A(5,3,1),\ B(2,4,6)$

2.20. $u = e^x \cdot \cos(y^2 - z^2)$,
$A(4,2,5),\ B(5,6,7)$

3. Вычислить простейшим способом интегралы

3.1.
$$\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} (x+2)dy + (y-2)dx$$

3.2.
$$\int\limits_{(0;1)}^{(2;4)} (x+y)dx - (y-x)dy$$

3.3.
$$\int\limits_{(-1;1)}^{(1;3)} (x+y+2)dx + (x+3)dy$$

3.4.
$$\int\limits_{(-2;0)}^{(0;2)} (2x-4)dx - (5-y)dy$$

3.5.
$$\int\limits_{(-2;2)}^{(2;4)} (2x-y+3)dx - (x-2)dy$$

3.6.
$$\int\limits_{(-1;1)}^{(3;2)} ydx + (x+y+1)dy$$

3.7.
$$\int\limits_{(-2;-2)}^{(2;4)} (3x-y)dx + (2y-x)dy$$

3.8.
$$\int\limits_{(-3;0)}^{(1;2)} (2y+1)dx + (2x-1)dy$$

3.9. $\int\limits_{(-1;-3)}^{(3;1)} (2x+y)dx + (2y-x+3)dy$

3.10. $\int\limits_{(-1;-2)}^{(1;4)} (4x-2y)dx + (3y-2x)dy$

3.11. $\int\limits_{(0;-2)}^{(1;2)} (x+y+2)dx+(x+y+5)dy$

3.12. $\int\limits_{(-4;-2)}^{(-1;0)} (y-x+1)dx + (x-y-1)dy$

3.13. $\int\limits_{(-1;1)}^{(2;2)} (2+3y)dx + (3x+5y-7)dy$

3.14. $\int\limits_{(-3;0)}^{(0;3)} (6+y)dx+(x-2)dy$

3.15. $\int\limits_{(1;3)}^{(2;5)} (2x-3)dx+(3y+4)dy$

3.16. $\int\limits_{(1;0)}^{(5;4)} (4x-2y)dx+(6-2x)dy$

3.17. $\int\limits_{(2;2)}^{(3;6)} (1+y)dx+(1+x)dy$

3.18. $\int\limits_{(-2;-2)}^{(1;5)} (4+3y)dx+(3x+2y)dy$

3.19. $\int\limits_{(3;3)}^{(5;7)} (5-y)dx+(2-x-y)dy$

3.20. $\int\limits_{(2;1)}^{(4;3)} (2+y)dx+(8+x-y)dy$

4.Вычислить интегралы от полных дифференциалов

4.1. $\int\limits_{(1;0;-2)}^{(5;2;2)} (x+1)dx-(y+2)dy+3dz$

4.2. $\int\limits_{(-1;-1;0)}^{(1;0;-2)} 3dx+(y+1)dy-4dz$

4.3. $\int\limits_{(1;1;2)}^{(2;3;6)} (2-x)dx+(1+y)dy+5dz$

4.4. $\int\limits_{(0;1;1)}^{(2;3;4)} (x+3)dx+(y-4)dy+zdz$

4.5. $\int\limits_{(2;4;1)}^{(5;4;6)} (2x+y+z)dx+(x+2y+z)dy+(x+y+2z)dz$

4.6.

$\int\limits_{(0;0;0)}^{(1;2;3)} (3x^2+2y^2+3z)dx+(4xy+2y-z)dy+(3x-y-2)dz$

4.7. $\int\limits_{(1;1;2)}^{(1;4;8)} (\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2})dx+(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2})dy+(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2})dz$

4.8.

$\int\limits_{(2;2;3)}^{(3;3;6)} (3x+2y+z)dx+(2x+3y+z+)dy+(x+2y+3z)dz$

4.9.

$\int\limits_{(0;1;1)}^{(3;2;4)} (x+2y+3z)dx+(3x+y+2z)dy+(2x+3y+z)dz$

4.10. $\int\limits_{(1;2;2)}^{(2;3;5)} (x+y-z)dx+(x+y+z)dy+(x-y+z)dz$

4.11.
$$\int\limits_{(5;4;3)}^{(3;4;5)} (x+2y-2z)dx + (2x+y-2z)dy + (2x-2y+z)dz$$
4.12.
$$\int\limits_{(1;1;0)}^{(2;2;2)} (x \cdot e^{x^2+y^2+z^2})dx + (y \cdot e^{x^2+y^2+z^2})dy + (z \cdot e^{x^2+y^2+z^2})dz$$
4.13. $$\int\limits_{(1;0;0)}^{(2;4;3)} (\ln(yz))dx + (x \cdot \frac{x}{y})dy + (x \cdot \frac{x}{z})dz$$
4.14. $$\int\limits_{(1;1;1)}^{(2;3;4)} (yze^{xyz})dx + (xze^{xyz})dy + (xye^{xyz})dz$$
4.15.
$$\int\limits_{(2;4;2)}^{(3;5;7)} (yz\sin(xyz))dx + (xz\sin(xyz))dy + (xy\sin(xyz))dz$$
4.16.
$$\int\limits_{(0;1;1)}^{(2;2;2)} (\cos(x+yz))dx + (z\cos(x+yz))dy + (y\cos(x+yz))dz$$
4.17. $$\int\limits_{(3;3;3)}^{(1;4;7)} (2xz)dx + (2yz)dy + (x^2+y^2)dz$$
4.18. $$\int\limits_{(3;4;3)}^{(5;4;4)} (y\sin z)dx + (x\sin z)dy + (xy\cos z)dz$$
4.19. $$\int\limits_{(2;3;1)}^{(4;4;4)} (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}})dx + (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}})dy - (\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}})dz$$
4.20. $$\int\limits_{(1;2;1)}^{(3;4;5)} (\frac{x+1}{yz})dx - (\frac{x+1}{y^2z})dy - (\frac{x+1}{yzY2})dz$$

5. Найти функцию по ее полному дифференциалу

5.1. $du = (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

5.2. $du = \dfrac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$

5.3. $du = (3x^2y + \dfrac{1}{y})dx + (x^3 - \dfrac{x}{y^2})dy$

5.4. $du = (\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y)dx + (\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x)dy$

5.5. $du = xdx + ydy - zdz$

5.6. $du = yzdx + xzdy + xydz$

5.7. $du = \dfrac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

5.8. $du = 4(x^2 - y^2)(xdx - ydy)$

5.9. $du = \dfrac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$

5.10. $du = \dfrac{3ydy + 3xdx}{x^2+y^2}$

5.11. $du = (2x + 3y)dx + (3x - 4y + 2)dy$

5.12 $du = (2x^2 + 2x^2y^3)dx + (2x^3y^2 - 9y^3)dy$

5.13. $du = (x + y)(dx + dy)$

5.14. $du = \dfrac{ydy - xdx}{y^2}$

5.15. $du = (x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$

5.16. $du = (y + 1)dx + (z - 1)dy + (x + 2)dz$

5.17. $du = (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$

5.18. $du = (x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (x - 2y^2 + 3)dy$

5.19. $du = (3x^2y + y)dx + (x - 2y^2 + 3)dy$

5.20. $du = (\cos x + 3x^2y)dx + (x^3 - y^2)dy$

6. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по кривой L

6.1. $\int\limits_L (2x+3y+4)dx + (4x-3y+2)dy$, L - ломаная ABC: $A(3,6), B(3,0), C(2,4)$.

6.2. $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, L - верхняя половина эллипса $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, пробегаемая против часовой стрелки.

6.3. $\int\limits_L xdx + (y+3)dy$, L - верхняя половина эллипса $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, пробегаемая по часовой стрелке.

6.4. $\int\limits_L (y+z+1)dx + (x+y+2)dy + (x+z+3)dz$, $L: x=2\cos t, y=2\sin t, z=4t, 0\le t\le 2\pi$.

6.5. $\int\limits_L (x^2+y^2)dx$, L - окружность $x^2+y^2=9$, пробегаемая против часовой стрелки.

6.6. $\int\limits_L (x^2+y^2)dy$, L - правая полуокружность $x^2+y^2=16$, пробегаемая против часовой стрелки.

6.7. $\int\limits_L (2x-3y+4)dx$, L - верхняя полуокружность $x^2+y^2=1$, пробегаемая по часовой стрелке.

6.8. $\int\limits_L (4x+5y+6)dy$, L - нижняя полуокружность $x^2+y^2=4$, пробегаемая по часовой стрелке.

6.9. $\int\limits_L (x+y)dx + (x-y)dy$, $L:$ - $y=x^2$ от $A(0,0)$ до $B(2,4)$.

6.10. $\int\limits_L xydx - ydy$, L - парабола AB, симметричная относительно Ox, $A(4,0), B(0,2)$.

6.11. $\int\limits_L xdx + xydy$, L - парабола AB, симметричная относительно Oy, $A(2,0), B(0,4)$.

6.12. $\int\limits_L (x^2+4)dy$, L - ломаная ABC: $A(1,1), B(1,4), C(0,4)$.

6.13. $\int\limits_L (3y - y^2 + 1)dx$, L - ломаная ABC: $A(1,2), B(1,4), C(-2,1)$.

6.14. $\int\limits_L (x+1)dx + xyzdy + y^2zdz$, L - отрезок AB: $A(2,3,-1), B(3,-2,0)$.

6.15. $\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$, AB - отрезок параболы $y = ax^2$: $A(0,0), B(2,8)$.

6.16. $\int\limits_L (3x + 2y)dy$, L - ломаная ABC: $A(4,1), B(4,4), C(0,0)$.

6.17. $\int\limits_L (3y^3 - 2y^2 + 2)dx$, L - ломаная ABC: $A(-1,2), B(3,4), C(-5,4)$.

6.18. $\int\limits_L (y+1)dx + (x+y+z)dy + x^2zdz$, L - отрезок AB: $A(0,3,1), B(2,-1,4)$.

6.19. $\int\limits_{AB} (x^2y - xy^2 + 1)dx + (y^2 - 2xy + 3)dy$, AB - отрезок параболы $y = ax^2$: $A(0,0), B(3,18)$.

6.20. $\int\limits_L (z+2)dx + xzdy + (yz+1)dz$, L - отрезок AB: $A(-2,0,1), B(3,2,2)$.

7. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура L

7.1. $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k};$
$L : \{x = \sqrt{2}\cos t; y = \sqrt{2}\sin t; z = 2\sin t\}$

7.2. $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k};$
$L : \{x = 2\cos t; y = 2\sin t; z = 1 - \cos t\}$

7.3. $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k};$
$L : \{x = 4\cos t; y = 4\sin t; z = 4\}$

7.4. $\vec{a} = (x + 1)\vec{i} + (y + 2)\vec{j} + (z + 3)\vec{k};$
$L : \{x = 3\sin t; y = 3\cos t; z = 1 + \sin t\}$

7.5. $\vec{a} = (x^2 - y)\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k};$ $L : \{x^2 + y^2 = 1;\ z = 1\}$

7.6. $\vec{a} = (x^2 - y^2)\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k};$ $L :$
$\{x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ x^2 + y^2 = 4\}$

7.7. $\vec{a} = x\vec{i} + yz\vec{j} - x\vec{k};$ $L : \{x^2 + y^2 = 1;\ x + y + z = 1\}$

7.8. $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k};$ $L : \{x^2 + y^2 = 9;\ x + y + z = 1\}$

7.9. $\vec{a} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + y^2\vec{k};$
$L : \{x^2 + y^2 + z^2 = 25;\ x^2 + y^2 = 16 (z > 0)\}$

7.10. $\vec{a} = y\vec{i} + (1 - x)\vec{j} - z\vec{k};$
$L : \{x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ x^2 + y^2 = 1 (z > 0)\}$

7.11. $\vec{a} = 4x\vec{i} + 2\vec{j} - xy\vec{k};$ $L : \{z = 2(x^2 + y^2) + 1;\ z = 7\}$

7.12. $\vec{a} = (yz + 1)\vec{i} + (xz + 2)\vec{j} - (x^2 - 3)\vec{k};$
$L : \{4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0;\ z = 2\}$

7.13. $\vec{a} = yz\vec{i} - xz\vec{j} + xy\vec{k};$ $L :$
$\{x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ x^2 + y^2 = 4\}$

7.14. $\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (2 - x)\vec{j} + 4\vec{k};$
$L : \{z = 8 - (x^2 + y^2)/2 + 1;\ z = 0\}$

7.15. $\vec{a} = -x^2y^3\vec{i} + 4\vec{j} + x\vec{k};$
$L : \{x = 2\cos t; y = 2\sin t; z = 4\}$

7.16. $\vec{a} = y\vec{i} - 9x\vec{j} + 3x\vec{k}$;
$L : \{x = 3\sin t; y = 3\cos t; z = 1 - 3\sin t - 3\cos t\}$

7.17. $\vec{a} = (x - z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$;
$L : \{x = \sin t; y = \cos t; z = 5\}$

7.18. $\vec{a} = (x - 2y)\vec{i} + (y - 2x)\vec{j} + 2\vec{k}$;
$L : \{x = 4\cos t; y = 4\sin t; z = 2\}$

7.19. $\vec{a} = (1 + 2x)\vec{i} + (2 + y)\vec{j} + (3 - z)\vec{k}$;
$L : \{x = 2\sin t; y = 2\cos t; z = 2 + \cos t\}$

7.20. $\vec{a} = (z - 2x)\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + \vec{k}$;
$L : \{x = 5\sin t; y = 5\cos t; z = \sin t + \cos t\}$

8. Вычислить работу силового поля $\vec{F}$ вдоль линии L от точки A до точки B

8.1. $\vec{F} = \{x^2 + y^2; x^2 - y\}$; $L : \{y = |x|\}$,
$A(-1; 1)$, $B(2; 2)$

8.2. $\vec{F} = \{x^2 - 2xy; y^2 - 2xy\}$; $L : \{y = x^2\}$,
$A(-1; 1)$, $B(1; 1)$

8.3. $\vec{F} = \{2xy; x^2\}$; $L : \{x^2 + y^2 = 1\}$, $A(1; 0)$, $B(0; 1)$

8.4. $\vec{F} = \{x^2 + 2xy; x^2 + y^2\}$; $L : \{y = x^2\}$,
$A(0; 0)$, $B(1; 1)$

8.5. $\vec{F} = \{1 + xy^2; 1 = x^2y\}$; $L : \{y = 4 - |x|\}$,
$A(-2; 2)$, $B(4; 0)$

8.6. $\vec{F} = \{x^2 - 2y; y^2 - 2x\}$; $L : \{y = 2|x| - 2\}$,
$A(-1; 0)$, $B(3; 4)$

8.7. $\vec{F} = \{x + y + 1; x - y - xy\}$; $L : \{y = x^3\}$,
$A(-1; -1)$, $B(1; 1)$

8.8. $\vec{F} = \{xy; x^2 + y^2\}$; $L : \{y = 4 - x^2\}$,
$A(-1; 3)$, $B(3; -5)$

8.9. $\vec{F}=\{x^3;x-3y\}$; $L:\{y=4-2x\}$, $\quad A(-2;8)$, $B(2;0)$

8.10. $\vec{F}=\{3x+2;4-y^2\}$; $L:\{y=\sin(\pi x)\}$,
$A(0;0)$, $B(1;0)$

8.11. $\vec{F}=\{x-y^3;y-x^3\}$; $L:\{y=6-3|x|\}$,
$A(0;6)$, $B(2;0)$

8.12. $\vec{F}=\{x^2-1;y^2+1\}$; $L:\{y=\sqrt{x}\}$, $\quad A(0;0)$, $B(4;2)$

8.13. $\vec{F}=\{xy+1;1-xy\}$; $L:\{y=\sqrt{4-x^2}\}$,
$A(-2;0)$, $B(0;2)$

8.14. $\vec{F}=\{x^2y;xy^2\}$; $L:\{y=-\sqrt{1-x^2}\}$,
$A(-1;0)$, $B(0;-1)$

8.15. $\vec{F}=\{1+x+y;xy\}$; $L:\{y=x^4\}$, $\quad A(0;0)$, $B(1;1)$

8.16. $\vec{F}=\{2xy-1;x-y+2\}$; $L:\{y=x\sqrt{x}\}$,
$A(0;0)$, $B(4;8)$

8.17. $\vec{F}=\{\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi y);\cos(\pi x)\cdot\sin(\pi y)\}$;
$L:\{y=2x+4\}$, $\quad A(-1;2)$, $B(1;6)$

8.18. $\vec{F}=\{\sin\pi(x+y);\sin\pi(x-y)\}$;
$L:\{y=2-x\}$, $\quad A(0;2)$, $B(0.5;1.5)$

8.19. $\vec{F}=\{\cos\pi(x-y);\cos\pi(x+y)\}$;
$L:\{y=2/x\}$, $\quad A(1;2)$, $B(2;1)$

8.20. $\vec{F}=\{e^x\sin y;e^y\cos x\}$; $L:\{xy=1\}$,
$A(0.5;2)$, $B(2;0.5)$

9. Вычислить поверхностные интегралы второго рода по положительной стороне поверхности P

9.1. $\iint\limits_P (x+1)dydz+(y+z)dxdz+(z-2x)dxdy$;
$P:\{-1\le y\le 2;\ 0\le z\le 4;\ x=3\}$

9.2. $\iint\limits_P (x-y)dydz + (y+2z)dxdz + (x-3z)dxdy;$

$P : \{-4 \le x \le -2;\ 1 \le z \le 4;\ y = 2\}$

9.3. $\iint\limits_P (2-x)dydz + (3+y)dxdz + (4-z)dxdy;$

$P : \{-1 \le x \le 3;\ -2 \le y \le 2;\ z = 3\}$

9.4. $\iint\limits_P (z-x)dydz + (x+1)dxdz + (2-y)dxdy;$

$P : \{2 \le y \le 3;\ 3 \le z \le 5;\ x = 6\}$

9.5. $\iint\limits_P (x+5)dydz + (x-2)dxdz + (z-y)dxdy;$

$P : \{3 \le y \le 5;\ 1 \le z \le 5;\ x = 3\}$

9.6. $\iint\limits_P (z+2)dydz + (x+3)dxdz + (y+4)dxdy;$

$P : \{0 \le y \le 2;\ 1 \le z \le 3;\ x = 5\}$

9.7. $\iint\limits_P (y-3)dydz + (z-2)dxdz + (x-1)dxdy;$

$P : \{1 \le x \le 2;\ 3 \le z \le 4;\ y = 8\}$

9.8. $\iint\limits_P (y+1)dydz + (2-x)dxdz + (z+3)dxdy;$

$P : \{-3 \le x \le 3;\ -2 \le y \le 2;\ z = 0\}$

9.9. $\iint\limits_P (x+y+z)dydz + (y+z)dxdz + zdxdy;$

$P : \{2 \le y \le 4;\ -4 \le z \le -2;\ x = 1\}$

9.10.

$\iint\limits_P (x-y+z)dydz + (x+y-z)dxdz + (x+y+z)dxdy;$

$P : \{0 \le x \le 1;\ 3 \le y \le 5;\ z = 0\}$

9.11. $\iint\limits_P (x+4)dydz + (y+z\cos z)dxdz + (z-2e^y)dxdy;$

$P : \{-2 \le y \le 2;\ 0 \le z \le 3;\ x = 3\}$

9.12. $\iint\limits_P (x^4-4y)dydz + (y+2)dxdz + (x^2-z^3)dxdy;$

$P : \{-3 \le x \le -1;\ 2 \le z \le 4;\ y = 2\}$

9.13. $\iint\limits_P (2x - xy^2)dydz + (3x + y^5)dxdz + (4 - z)dxdy;$

$P : \{-4 \le x \le 0;\ -2 \le y \le 2;\ z = 3\}$

9.14.

$\iint\limits_P (y + 1)dydz + (y + z - x^2)dxdz + (z - 2x + y)dxdy;$

$P : \{-2 \le y \le 1;\ 2 \le z \le 5;\ x = 3\}$

9.15.

$\iint\limits_P (x - y\ln y)dydz + (x + z)dxdz + (x - 3z - e^y)dxdy;$

$P : \{-5 \le x \le -2;\ 0 \le z \le 2;\ y = 2\}$

9.16. $\iint\limits_P (2 - xyz)dydz + (3 + yz)dxdz + (12 + z)dxdy;$

$P : \{-1 \le x \le 3;\ -2 \le y \le 2;\ z = 3\}$

9.17. $\iint\limits_P (z + 2)dydz + (y + \sin z)dxdz + (z - 2\cos x)dxdy;$

$P : \{-2 \le y \le 0;\ 0 \le z \le 6;\ x = 3\}$

9.18. $\iint\limits_P (x - y^2z)dydz + (2x - z)dxdz + (x - 3yz)dxdy;$

$P : \{-4 \le x \le -1;\ 1 \le z \le 4;\ y = 2\}$

9.19. $\iint\limits_P (2xy - xz)dydz + (3xz + yz)dxdz + (4 - x)dxdy;$

$P : \{-1 \le x \le 2;\ -3 \le y \le 1;\ z = 3\}$

9.20.

$\iint\limits_P (x^2 - 1)dydz + (x - y + z)dxdz + (z - 2x + 3y)dxdy;$

$P : \{-4 \le y \le -2;\ 1 \le z \le 3;\ x = 3\}$

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz)

10.1. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$; P:{x+2y+z=2}
10.2. $\vec{a} = -2x\vec{i} + 3y\vec{j} + 4\vec{k}$; P:{2x+y+z=4}
10.3. $\vec{a} = 3x\vec{i} + 4\vec{j} + 5z\vec{k}$; P:{2x+y+2z=2}
10.4. $\vec{a} = x\vec{i} + 5\vec{j} + y\vec{k}$; P:{x+y+3z=3}
10.5. $\vec{a} = z\vec{i} + 2y\vec{j} + 3x\vec{k}$; P:{x+3y+z=6}
10.6. $\vec{a} = y\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$; P:{2x+4y+z=4}
10.7. $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$; P:{2x+3y+z=6}
10.8. $\vec{a} = y\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$; P:{x+3y+2z=12}
10.9. $\vec{a} = 2y\vec{i} + 3x\vec{j} + 4z\vec{k}$; P:{3x+2y+4z=12}
10.10. $\vec{a} = 3z\vec{i} + 2x\vec{j} + 3y\vec{k}$; P:{x+3y+4z=12}
10.11. $\vec{a} = 2x\vec{i} - 3y\vec{j} + 4\vec{k}$; P:{x+2y+2z=4}
10.12. $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 3z\vec{k}$; P:{3x+y+3z=91}
10.13. $\vec{a} = (1-x)\vec{i} + z\vec{j} + z\vec{k}$; P:{2x+2y+z=21}
10.14. $\vec{a} = 3\vec{i} - y\vec{j} - 3z\vec{k}$; P:{x+3y+5z=15}
10.15. $\vec{a} = 3x\vec{i} + 4\vec{j} - x\vec{k}$; P:{3x+2y+z=12}
10.16. $\vec{a} = -\vec{i} + 2y\vec{j} + 3x\vec{k}$; P:{4x+3y+2z=12}
10.17. $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + z\vec{k}$; P:{3x+3y+z=91}
10.18. $\vec{a} = z\vec{i} + 4\vec{j} + y\vec{k}$; P:{2x+3y+2z=6}
10.19. $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}$; P:{3x+2y+3z=12}
10.20. $\vec{a} = 2\vec{i} - z\vec{j} - y\vec{k}$; P:{2x+4y+2z=4}

11. Вычислить поверхностные интегралы второго рода по положительной стороне поверхности Γ

11.1. $\iint\limits_{\Gamma} (x+y+2)dydz + (x-z+1)dxdz + (z-2)dxdy;$

$\Gamma : \{z = 4 - x^2 - y^2;\ z > 0\}$

11.2. $\iint\limits_{\Gamma} (x^2+y^2)dydz + (y^2+z^2)dxdz + (x^2+z^2)dxdy;$

$\Gamma : \{z = \sqrt{x^2+y^2};\ 0 \leq z < 1\}$

11.3. $\iint\limits_{\Gamma} yzdydz - xdxdz - ydxdy;$

$\Gamma : \{z^2 = x^2 + y^2;\ -4 < 0 \leq 0\}$

11.4. $\iint\limits_{\Gamma} (x+1)dydz + (y+2)dxdz + (z+3)dxdy;$

$\Gamma : \{z = x^2 + y^2 - 9;\ -9 \leq 0 < 0\}$

11.5. $\iint\limits_{\Gamma} 2xdydz + (1-2y)dxdz + 2zdxdy;$

$\Gamma : \{x^2 + y^2 = 1 - 2y =;\ z = 0;\ y \geq 0\}$

11.6.
$\iint\limits_{\Gamma} (x^2+y^2)dydz + (y^2+z^2)dxdz + (x^2+y^2+z^2)dxdy;$

$\Gamma : \{z = 0;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

11.7. $\iint\limits_{\Gamma} xdydz + (x+y)dxdz + (x+y+z)dxdy;$

$\Gamma : \{\Delta ABC; \quad A(1;0;0),\ B(0;2;0),\ C(0;0;2)\}$

11.8. $\iint\limits_{\Gamma} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy;$

$\Gamma : \{y = \sqrt{4 - x^2 = z^2};\ y > 0\}$

11.9. $\iint\limits_{\Gamma} (1-x^2)dydz + (1-y^2)dxdz + (1-z^2)dxdy;$

$\Gamma : \{z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + 1;\ z > 1\}$

11.10. $\iint\limits_{\Gamma} (x+y)dydz + (y+6)dxdz + (z+10)dxdy;$

$\Gamma : \{x = -\sqrt{16 - y^2 - z^2};\ x < 0\}$

Вычислить поверхностные интегралы второго рода по положительной стороне поверхности Γ, вырезанной плоскостями P_1 и P_2

11.11. $\iint\limits_{\Gamma} xdydz + ydxdz + zdxdy;$

$\Gamma : \{x^2 + y^2 = 1;\ P_1 : z = 0;\ \ P_2 : z = 2\}$

11.12. $\iint\limits_{\Gamma} xdydz + ydxdz - zdxdy;$

$\Gamma : \{x^2 + y^2 = 4;\ P_1 : z = 1;\ \ P_2 : z = 2\}$

11.13. $\iint\limits_{\Gamma} xdydz + ydxdz + (2z-1)dxdy;$

$\Gamma : \{x^2 + y^2 = 3;\ P_1 : z = -1 =;\ \ P_2 : z = 1 =\}$

11.14. $\iint\limits_{\Gamma} xdydz + ydxdz + z^3dxdy;$

$\Gamma : \{x^2 + y^2 = 2;\ P_1 : z = 0;\ \ P_2 : z = 1 =\}$

11.15. $\iint\limits_{\Gamma} xdydz + ydxdz + xyzdxdy;$

$\Gamma : \{x^2 + y^2 = 5;\ P_1 : z = 0;\ \ P_2 : z = 5\}$

11.16. $\iint\limits_{\Gamma} (x+1)dydz + (y+2)dxdz + (z-1)dxdy;$

$\Gamma : \{x^2 + z^2 = 4;\ P_1 : y = 1;\ \ P_2 : y = 3\}$

11.17. $\iint\limits_{\Gamma} (x-1)dydz + (y-1)dxdz + (z-1)dxdy;$

$\Gamma : \{y^2 + z^2 = 1;\ P_1 : x = 3;\ \ P_2 : x = 4\}$

11.18. $\iint\limits_{\Gamma} (x+2)dydz + (y-2)dxdz + (z+2)dxdy;$

$\Gamma : \{x^2 + z^2 = 2;\ P_1 : y = 0;\ \ P_2 : y = 2\}$

11.19. $\iint\limits_{\Gamma} xdydz + (y+2)dxdz + z^2dxdy;$

$\Gamma : \{x^2 + y^2 = 3;\ P_1 : z = 1;\ \ P_2 : z = 3\}$

11.20. $\iint\limits_{\Gamma} (x+3)dydz + (y+2)dxdz + (z+1)dxdy;$

$\Gamma : \{y^2 + z^2 = 4;\ P_1 : x = 1;\ \ P_2 : x = 4\}$

12. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности Γ

12.1. $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (x+y)\vec{k}$; Γ: $\{x^2 + y^2 = 9;\ z = x;$ $z = 0 (z \geq 0)\}$

12.2. $\vec{a} = 2x\vec{i} + z\vec{k}$; Γ: $\{z = 3x^2 + 2y^2 + 1;\ x^2 + y^2 = 4;$ $z = 0\}$

12.3. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$; Γ: $\{y = x^2;\ y = 4x^2;$ $y = 1 (x \geq 0);\ z = y;\ z = 0\}$

12.4. $\vec{a} = 3x\vec{i} - z\vec{j}$; Γ: $\{z = 6 - x^2 - y^2;\ z^2 = x^2 + y^2;$ $(z \geq 0)\}$

12.5. $\vec{a} = (z+y)\vec{i} + y\vec{j} - x\vec{k}$; Γ: $\{x^2 + y^2 = 2y;\ y = 2;\}$

12.6. $\vec{a} = x\vec{i} - (x+2y)\vec{j} + y\vec{k}$;
Γ: $\{x^2 + y^2 = 1;\ z = 0;\ x + 2y + 3z = 6\}$

12.7. $\vec{a} = 2(z-y)\vec{i} + (x-z)\vec{k}$;
Γ: $\{x^2 + 3y^2 + 1 = z;\ z = 0;\ x^2 + y^2 = 1\}$

12.8. $\vec{a} = x\vec{i} + z\vec{j} - y\vec{k}$;
Γ: $\{z = 4 - 2(x^2 + y^2);\ z = 2(x^2 + y^2)\}$

12.9. $\vec{a} = z\vec{i} - 4y\vec{j} + 2x\vec{k}$; Γ: $\{z = x^2 + y^2;\ z = 1;\}$

12.10. $\vec{a} = 4z\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k}$;
Γ: $\{3x + 2y = 12;\ 3x + y = 6;\ x + y + z = 6;$ $y = z = 0\}$

Вычислить поверхностные интегралы второго рода через внешнюю сторону замкнутой поверхности Γ с помощью формулы Остроградского-Гаусса

12.11. $\iint\limits_{\Gamma} xdydz + ydxdz + zdxdy$; Γ :$\{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$

12.12. $\iint\limits_{\Gamma} yzdydz + xzdxdz + xydxdy$;

Γ :$\{x^2 + y^2 = a^2;\ 0 \le z \le h\}$

12.13. $\iint\limits_{\Gamma} (y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy$;

Γ:$\{x^2 + y^2 = z^2;\ 0 \le z \le h\}$

12.14. $\iint\limits_{\Gamma} xdydz + ydxdz + zdxdy$;

Γ :$\{z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2};\ 0 \le z \le 1\}$

12.15. $\iint\limits_{\Gamma} ydydz + zdxdz + xdxdy$;

Γ :$\{x + y + z = a;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0\}$

12.16. $\iint\limits_{\Gamma} x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$;

Γ :$\{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$

12.17. $\iint\limits_{\Gamma} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$;

Γ :$\{$поверхность куба $0 \le x \le a;\ 0 \le y \le a;\ 0 \le z \le a\}$

12.18. $\iint\limits_{\Gamma} x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$;

Γ :$\{x^2 + y^2 + z^2 = a^2;\ z = 0\}$

12.19. $\iint\limits_{\Gamma} (x + 1)dydz + ydxdz + (z - 1)dxdy$;

Γ :$\{y^2 + z^2 = 4\ x = 0;\ x = 2\}$

12.20. $\iint\limits_{\Gamma} xdydz + ydxdz + zdxdy;$

Γ :$\{x^2 + z^2 = 9\ y = 1;\ y = 3\}$

13. Построить семейство эквипотенциальных линий следующих векторных полей

13.1. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$

13.2. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}$

13.3. $\vec{a} = -x\vec{i} + y\vec{j}$

13.4. $\vec{a} = -x\vec{i} - y\vec{j}$

13.5. $\vec{a} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

13.6. $\vec{a} = \dfrac{x\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

13.7. $\vec{a} = \dfrac{-\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

13.8. $\vec{a} = \dfrac{-\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

13.9. $\vec{a} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{(x^2 + y^2)^2}$

13.10 $\vec{a} = \dfrac{x\vec{i} - \vec{j}}{(x^2 + y^2)^2}$

13.11. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

13.12. $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

13.13. $\vec{a} = -\dfrac{y}{x^2}\vec{i} + \dfrac{1}{x}\vec{j}$

13.14. $\vec{a} = -\dfrac{1}{y}\vec{i} - \dfrac{x}{y^2}\vec{j}$

13.15. $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}$

13.16. $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j}$

13.17. $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j}$

13.18. $\vec{a} = 2x\vec{i} + \vec{j}$

13.19. $\vec{a} = 3\vec{i} + 2y\vec{j}$

13.20. $\vec{a} = 4\vec{i} - y\vec{j}$

14. Проверить потенциальность следующих векторных полей

14.1. $\vec{a} = (yz^2 - 1)\vec{i} + xz^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$

14.2. $\vec{a} = (x^2 + y - z)\vec{i} + (xy - xz)\vec{j} + x^2z\vec{k}$

14.3.
$\vec{a} = \cos(2y + 3z)\vec{i} - 2y\sin(2y + 3z)\vec{j} + 3z\sin(2y + 3z)\vec{k}$

14.4. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$

14.5. $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$

14.6. $\vec{a} = y^2z^2\vec{i} + (2xyz^3 + z^2)\vec{j} + (3xy^2z^2 + 2yz + 1)\vec{k}$

14.7. $\vec{a} = (2xy^3 + 2xy\sin(x^2y)\vec{i} + (3x^2y^2 + x^2\sin(x^2y))\vec{j}$

14.8. $\vec{a} = y^2(1 - z)\vec{i} + 2xy(1 - z)\vec{j} - (xy^2 - 3z^2)\vec{k}$

14.9. $\vec{a} = (x^2 - xz)\vec{i} + (y^2 + xz)\vec{j} + (z^2 - xy)\vec{k}$

14.10. $\vec{a} = xyz\vec{i} + x^2z\vec{j} + xy^2\vec{k}$

Проверить соленоидальность следующих векторных полей

14.11. $\vec{a} = (x^2 - yz + 2)\vec{i} - 2xy\vec{j} + (yx^3 - 1)\vec{k}$

14.12.
$\vec{a} = (xy - yz + xz)\vec{i} + (yz - xz + xy)\vec{j} + (xz - xy + yz)\vec{k}$

14.13. $\vec{a} = x^2y\vec{i} + y^2(z - x)\vec{j} + y(x - z^2)\vec{k}$

14.14. $\vec{a} = 3x^2\vec{i} + 2y\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$

14.15. $\vec{a} = xy\vec{i} - (x + y)\vec{j} + z(1 - y)\vec{k}$

14.16. $\vec{a} = x^2yz\vec{i} + 2xyz\vec{j} - xz^2(1 + y)\vec{k}$

14.17. $\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} - (xy + z^3)\vec{j} + (y^2 + xz)\vec{k}$

14.18. $\vec{a} = (x^2yz - x^3)\vec{i} + yx^3\vec{j} + (x^2z - y)\vec{k}$

14.19. $\vec{a} = (xy^2 - z)\vec{i} + (z - xy)\vec{j} + z(x - y^2)\vec{k}$

14.20. $\vec{a} = (xy + xz)\vec{i} + (xz - xy)\vec{j} + xyz\vec{k}$

15. Выполнить следующие дифференциальные операции второго порядка

15.1. $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$; $rot\, rot\, \vec{a} =?$

15.2. $\vec{a} = xz\vec{i} + xy\vec{j} + yz\vec{k}$; $rot\, rot\, \vec{a} =?$

15.3. $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (x^2 + z^2)\vec{k}$; $rot\, rot\, \vec{a} =?$

15.4. $\vec{a} = (x^2 + z^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j} + (y^2 + z^2)\vec{k}$; $rot\, rot\, \vec{a} =?$

15.5. $\vec{a} = \sqrt{xy}\vec{i} + yz^2\vec{j} + x^2z^2\vec{k}$, $rot\ rot\, \vec{a} =?$

15.6. $\vec{a} = \sqrt{x-y}\vec{i} + \sqrt{y-z}\vec{j} + \sqrt{x-z}\vec{k}$; $rot\, rot\, \vec{a} =?$

15.7. $\vec{a} = \dfrac{x}{y}\vec{i} + \dfrac{y}{z}\vec{j} + \dfrac{x}{z}\vec{k}$; $rot\, rot\, \vec{a} =?$

15.8. $\vec{a} = \dfrac{x+y}{z}\vec{i} + \dfrac{y+z}{x}\vec{j} + \dfrac{x+z}{y}\vec{k}$, $rot\, rot\, \vec{a} =?$

15.9. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^3\vec{j} + z^4\vec{k}$; $grad\, div\, \vec{a} =?$

15.10. $\vec{a} = (x^2 + y^3)\vec{i} + (y^3 + z^4)\vec{j} + (z^4 + x^5)\vec{k}$; $grad\, div\, \vec{a} =?$

15.11. $\vec{a} = (x^3 - y^2 - z)\vec{i} + (y^3 - x^2 - z)\vec{j} + (z^3 - x^2 - y)\vec{k}$; $grad\, div\, \vec{a} =?$

15.12. $\vec{a} = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}$; $grad\, div\, \vec{a} =?$

15.13. $\vec{a} = x\vec{i} + xy\vec{j} + xyz\vec{k}$; $grad\, div\, \vec{a} =?$

15.14. $\vec{a} = \dfrac{y}{x}\vec{i} + \dfrac{z}{y}\vec{j} + \dfrac{x}{z}\vec{k}$; $grad\, div\, \vec{a} =?$

15.15. $\varphi = \ln(xy^2z^3)$; $div\, grad\, \varphi =?$

15.16. $\varphi = x\sin(y+z) - y\cos(y+z)$; $div\, grad\, \varphi =?$

15.17. $\varphi = e^{x^2+2y-3z}$; $div\, grad\, \varphi =?$

15.18. $\varphi = \sin x \cdot \cos y \cdot \mathrm{tg}\, z$; $div\, grad\, \varphi =?$

15.19. $\varphi = \sin^2(2x - 3y + 4z)$; $div\, grad\, \varphi =?$

15.20. $\varphi = e^{2x} \cdot \mathrm{tg}\, y \cdot \ln z$; $div\, grad\, \varphi =?$

УДК 512.62
Е741

Типовой расчет по векторному анализу[Текст]
/Сост. Ю.Д.Ермолаев.–Липецк:ЛГТУ, 2005.–25 с.

Типовой расчет предназначен для студентов факультета автоматизации и информатики и других факультетов, изучающих раздел теории поля в курсе математики.

Рецензент Ярославцева В.Я.

Библиографическмй список

1. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике[Текст] /Л.А.Кузнецов– М:Высшая школа, 1994.–175с.
2. Мироненко, Е.С. Высшая математика[Текст]/Е.С.Мироненко –М:Высшая школа,1998.–110с.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ
по векторному анализу

Ермолаев Юрий Данилович

Редактор Т.М.Курьянова
Подписано в печать Формат 60 × 94 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Печ. л. 1,2.
Тираж 200 экз. Заказ N .
Липецкий государственный технический университет.
398600 Липецк, ул. Московская, 30.
Типография ЛГТУ. 398600 Липецк, ул. Московская, 30.