

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования  
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»

На правах рукописи

**Жуков Петр Игоревич**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НЕСТАЦИОНАРНОГО НАГРЕВА  
ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕЯВНОЙ АДАПТАЦИЕЙ К ЕГО  
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ**

Специальность 1.2.2 Математическое  
моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
доктор технических наук, доцент  
Глущенко Антон Игоревич

Москва – 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Глава 1 Анализ методов моделирования нестационарной теплопроводности в твердых телах.....	13
1.1 Конечно-элементные методы моделирования нестационарной теплопроводности в твердых телах.....	20
1.1.1 Метод контрольных объемов.....	20
1.1.2 Зональный конечно-элементный метод.....	23
1.2 Конечно-разностные методы моделирования нестационарной теплопроводности в твердых телах.....	24
1.3 Выводы по главе.....	28
Глава 2 Адаптация моделей нестационарной теплопроводности.....	32
2.1 Численное решение модели нестационарной теплопроводности.....	32
2.2 Проблема адаптации модели нестационарной теплопроводности к теплофизическим параметрам твердого тела.....	38
2.2.1 Практический аспект проблемы “явной” групповой адаптации.....	43
2.2.2 Практический аспект проблемы адаптации к условиям теплообмена.....	48
2.3 Альтернативный взгляд на проблему адаптации модели нестационарной теплопроводности. ....	51
2.4 Выводы по главе.....	57
Глава 3 Конечно-разностная модель нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией.....	60
3.1 Предлагаемая модель на базе замены теплофизических коэффициентов на свободные параметры.....	60
3.2 Предложенный численный метод настройки параметров модели.....	61
3.3 Анализ алгоритмической сложности и устойчивости.....	72

3.4 Неявная адаптация к условиям нестационарного теплообмена.....	86
3.5 Выводы по главе.....	91
Глава 4 Разработка программных комплексов. Численные эксперименты сравнения моделей.....	93
4.1 Частный случай применения математических моделей нестационарной теплопроводности .....	93
4.2 Численные эксперименты апробации предложенной модели неявной адаптации на частном примере.....	98
4.3 Сравнительные численные эксперименты .....	103
4.3.1 Сравнение классической МКР с моделью DART- «случайного леса».....	103
4.3.2 Сравнение DART-модели и МКР с неявной адаптацией.....	106
4.3.3 Сравнение сеточных моделей с “явной” и неявной адаптацией.....	109
4.3.4 Анализ результатов сравнения моделей .....	113
4.4 Разработка проблемно-ориентированных программных комплексов.....	116
4.4.1 Программа для моделирования нестационарного теплопереноса в шестизонной печи .....	116
4.4.2 Программа расчета температурного поля в прямоугольном сечении с адаптивным коэффициентом теплообмена .....	118
4.4.3 Программная среда, реализующая предложенный численный метод неявной адаптации .....	119
4.5 Выводы по главе.....	123
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	126
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	129
ПРИЛОЖЕНИЕ А .....	139
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	149

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** Моделирование нагрева твердых тел различной геометрии в среде высоких температур на сегодняшний день находит свое применение в различных областях науки и техники в виде численных методов решения задачи нестационарной теплопроводности. Частным случаем применения подобных моделей является использование их для описания нагрева поверхностей твердых тел из сталей и материалов близких к ней по теплофизическим параметрам. Предполагается, что такие модели могут обладать прогностической функцией, которую можно использовать для повышения энергоэффективности тепловых процессов, происходящих в промышленных печах. Примеры такого использования можно найти в работах Б.Н. Парсункина, С.М. Андреева, Е.Ю. Мухиной, Д.А. Кургосова, Ю.М. Зубарева, Silvia Maria Zanolì, Crescenzo Pere и др. Примеры применения моделей нестационарной теплопроводности в других областях можно найти в работах А.В. Острик, Д.Н. Николаева, А.А. Черпунова, В.С. Зарубина, Г.Н. Кувыркина М.Р. Федяевского, П.Д. Алексеева, Ю.Л. Леухина, Р.В. Чернухина, Н.Ю. Дударевой, П.В. Литвинова и др. [1-18].

В основе моделирования нестационарной теплопроводности чаще всего лежит одноименное дифференциальное уравнение, представленное в двумерной постановке (реже – в трехмерной) с граничными условиями III-го рода. Оно устанавливает однозначное соответствие между дивергенцией температурного поля по сечению твердого тела и градиентом изменения температуры во времени для нелинейного теплообмена на его границе. Численные методы решения задач на основе такого дифференциального уравнения базируются на идее дискретизации непрерывных температурных полей в твердом теле таким образом, чтобы оно могло быть описано конечным набором точек. Решению прямых и обратных задач теплопроводности численными методами посвящены работы А.А. Самарского, О.М. Алифанова, Э.Я. Рапопорта, Ю.Э. Плешивцевой, А.Н. Дилигенской, Л.М. Ожерелковой, А.Ф. Албу, В.И. Зубова, В.И. Панферова, А.Б. Бирюкова, Liqiu Wang, Elie

Nachem James V. Beck, Keith A. Woodbury, Zhendong Shang, John Billingham и др. [19-37].

Основной проблемой численных методов для задачи нестационарной теплопроводности в условиях высоких температур является необходимость учитывать изменения от температуры таких теплофизических параметров нагреваемого твердого тела как плотность ( $\rho$ ), теплоемкость ( $c$ ) и теплопроводность ( $\lambda$ ). На сегодняшний день эта задача решается при помощи внешних моделей, описывающих динамику изменения этих параметров “явно” (“явная” адаптация к теплофизическим характеристикам нагреваемого твердого тела). У него имеется ряд недостатков, связанных, например, с ситуацией получения таких внешних моделей для групп материалов со схожими теплофизическими характеристиками. Внешние модели групповой “явной” адаптации влияют на алгоритмическую сложность и точность численного решения задачи. Кроме того, имеется практический аспект сложности получения таких внешних моделей для отдельных частных случаев нестационарного нагрева в высоких температурах. Наконец, нетривиальность данной проблеме придает необходимость также адаптировать модель “явно” к условиям теплообмена на границе твердого тела. Что в случае граничных условий III-го рода означает нахождение значения коэффициента теплообмена в каждый момент времени. Это наиболее нетривиальная проблема из перечисленных.

Ввиду данного факта в последнее время растет популярность подходов, которые предполагают, что уравнение нестационарного нагрева для ситуации высоких температур можно аппроксимировать, используя статистику, отражающую параметры протекающего теплового процесса. При таком подходе задача численного решения дифференциального уравнения заменяется на задачу регрессионного анализа, конечной целью которой является установить зависимость между температурой уже нагретого твердого тела и статистическими данными, отражающими, как именно оно нагревалось (время нагрева, температура и другие параметры). Построению таких

статистических моделей для различных частных случаев посвящены работы И.Г. Самарина, С.М. Андреева, Б.Н. Парсункина, Е.Ю. Мухиной, М.Ж. Богатова, С.И. Чибизовой, Silvia Maria Zanolì, Crescenzo Pere и др [1,3,38-40].

Качественным отличием статистических моделей является эффект неявной адаптации к теплофизическим характеристикам нагреваемого твердого тела и условиям теплообмена на его границах. Под неявной адаптацией здесь понимается возможность таких моделей восстанавливать необходимые динамики изменения теплофизических параметров от температуры из скрытых зависимостей, отраженных в статистике. Несмотря на то, что подобные модели в частных случаях показывают относительно высокую точность, они имеют ряд недостатков. Во-первых, они построены по принципу черного ящика и не отражают физических принципов протекания процесса нагрева. В результате модель отвечает на вопрос о температуре по итогам нагрева, но не может прогнозировать температуру тела после  $N$  минут нагрева. Во-вторых, для формирования эффекта неявной адаптации потребуется в каждом отдельном случае подобрать достаточно сложную внутреннюю структуру модели. При этом на сегодняшний день существуют только эвристические рекомендации по выбору этой структуры, что делает сам процесс получения такой модели нетривиальной задачей.

Предполагается, что эффект неявной адаптации можно перенести на математическую модель нестационарной теплопроводности. Такие модели обладают известной структурой и отражают физические принципы протекания процесса нагрева.

Таким образом, важной **практической задачей** является разработка проблемно-ориентированного программного комплекса, реализующего численный метод решения задачи нестационарной теплопроводности для граничных условий III-го рода с неявной адаптацией и гарантирующего, что алгоритмическая сложность и точность получаемого решения будет не ниже относительно классического метода с явной групповой адаптацией. **Научная задача** заключается в разработке математической модели и численного метода

решения задачи нестационарной теплопроводности, способных неявно адаптироваться к теплофизическим параметрам нагреваемого твердого тела и теплообмену на его границе, опираясь на статистические сведения о нестационарном нагреве, соответствующем граничным условиям III-го рода.

**Цель работы и задачи исследования.** Цель диссертационного исследования заключается в разработке математической модели и численного метода решения задачи нестационарной теплопроводности, способных неявно восстанавливать динамику изменения теплофизических характеристик нагреваемого твердого тела и условий теплообмена на его границах, используя статистические сведения о нестационарном нагреве, соответствующем граничным условиям III-го рода.

Для достижения поставленной цели были выделены следующие **задачи**.

1) Проанализировать существующие численные методы решения задачи нестационарной теплопроводности, позволяющие строить модели нагрева в среде высоких температур с граничными условиями III-го рода.

2) Рассмотреть классический численный метод решения задачи нестационарной теплопроводности с граничными условиями III-го рода. Изучить его структуру и определить каким именно образом происходит решение задачи адаптации такой модели “явным” образом.

3) Рассмотреть статистические методы, которые заменяют решение задачи нестационарной теплопроводности на восстановление зависимости температуры нагретого твердого тела по статистике его нагрева.

4) Разработать и исследовать математическую модель и численный метод решения задачи нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией к теплофизическим параметрам твердого тела и условиям теплообмена на его границе путем комбинирования подходов, рассмотренных в (2) и (3).

5) Разработать проблемно-ориентированный программный комплекс для предложенных в (4) математической модели и численного метода неявной адаптации. Апробировать предложенные модель, численный метод и

программный комплекс на распространенном частном случае нестационарного нагрева твердых тел из стали в промышленных печах. Выполнить сравнение предложенного численного метода и математической модели с моделями из (2) и (3).

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной.

1) Предложена математическая модель нестационарной теплопроводности в двумерной постановке для граничных условий III-го рода, отличающаяся от существующих решений тем, что изменения теплофизических параметров нагреваемого твердого тела и коэффициента теплообмена на его границе восстанавливается неявно из статистических данных о процессе нагрева, сохраняя при этом интерпретируемую структуру модели.

2) Предложен численный метод, обеспечивающий упомянутой модели неявную адаптацию к теплофизическим параметрам нагреваемого тела и условиям теплообмена на его границах, отличающийся от известных решений коэффициентных обратных задач теплопроводности (ОЗТ) заменой теплофизических параметров на безразмерные настраиваемые коэффициенты, их равномерной дискретизацией по всему времени жизни модели и формализацией законов настройки этих параметров на основе модели стохастического градиентного спуска для случая граничных условий III-го рода.

3) Предложен универсальный проблемно-ориентированный программный комплекс моделирования процесса нестационарного теплопереноса с граничными условиями III-го рода, отличающийся от имеющихся программных средств алгоритмической реализацией упомянутого численного метода неявной адаптации по статистическим данным и применением модульной гексагональной архитектуры объектно-ориентированного программирования (ООП).

**Теоретическая значимость работы.** Предложен альтернативный подход к решению обратной коэффициентной задачи нестационарной теплопроводности с граничными условиями III-го рода. Его суть заключается в замене её решения на задачу поиска оптимальных коэффициентов модели в каждой точке дискретного времени жизни на основе статистических данных о процессе нагрева и формализованных законов настройки этих коэффициентов по известной температуре уже нагретого твердого тела. **Практическая значимость** результатов диссертационного исследования заключается в реализации численного метода такой неявной адаптации в универсальном программном комплексе и его апробации на частном случае нестационарного нагрева твердых тел из стали в промышленных печах пламенного режима нагрева, для которого характерны условия III-го рода.

**Объект исследования.** Нестационарный нагрев твердых тел в среде высоких температур с граничными условиями III-го рода, отражающими конвективно-радиационный теплообмен на границе твердого тела.

**Предмет исследования.** Численные методы и алгоритмы решения задачи нестационарной теплопроводности, методы “явной” адаптации и решения коэффициентных обратных задач нестационарной теплопроводности.

**Методы исследования.** Инструменты численного моделирования на основе теории разностных схем, подходы к решению коэффициентных обратных задач нестационарной теплопроводности, методы статистического анализа, анализа сложности и устойчивости алгоритмов. При создании программного комплекса применен гексагональный объектно-ориентированный подход.

**Выносятся на защиту** следующие основные положения:

1) Математическая модель нестационарной теплопроводности, восстанавливающая изменения теплофизических параметров нагреваемого твердого тела и коэффициента теплообмена на его границе неявно из статистических данных нагрева.

2) Численный метод на основе метода градиентного спуска, обеспечивающий упомянутой выше модели неявную адаптацию при помощи замены непрерывных теплофизических коэффициентов на безразмерные настраиваемые параметры, равномерно дискретизированные по всему времени жизни модели, с формализованным законом их настройки для граничных условий III-го рода.

3) Универсальный проблемно-ориентированный программный комплекс моделирования процесса нестационарного теплопереноса с граничными условиями III-го рода, реализующий упомянутый численный метод с применением модульной гексагональной архитектуры ООП.

**Достоверность** научных результатов подтверждается корректным использованием математического аппарата, методов математического моделирования, численных методов, а также проведенными в достаточном объеме вычислительными экспериментами и успешной апробацией выносимых на защиту моделей и методов на наиболее распространенном случае нестационарного нагрева твердых тел из стали в промышленных проходных печах, а также сравнительным анализом полученных результатов с экспериментальными данными; обсуждением основных положений диссертации на семинарах и научных конференциях.

**Соответствие паспорту специальности.** Содержание диссертационной работы соответствует следующим пунктам паспорта специальности 1.2.2. – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

1. Численный метод на основе метода градиентного спуска, обеспечивающий упомянутой выше модели неявную адаптацию на основе решения задачи многопараметрической оптимизации методом стохастического градиентного спуска – п.2 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий».

2. Универсальный проблемно-ориентированный программный комплекс моделирования процесса нестационарного нагрева с граничными

условиями III-го рода, реализующий упомянутый численный метод с применением модульной гексагональной архитектуры ООП – **п.3** «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

3. Математическая модель нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией – **п.8** «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

**Реализация и внедрение результатов работы.** Полученные практические результаты и разработанное программное обеспечение используется в системе оптимизации расхода топлива печей нагрева АО Оскольский электрометаллургический комбинат (ОЭМК) им. А.А. Угарова. На компоненты математического и программного обеспечения получены свидетельства о регистрации программ для ЭВМ. Результаты исследования используются в учебном процессе СТИ НИТУ «МИСИС» в рамках образовательной программы по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии» при выполнении курсовых работ по дисциплине «Программирование на языках высокого уровня».

**Публикации.** Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 17 научных работах, в том числе 4 – в ведущих рецензируемых журналах из Перечня ВАК, 4 – в изданиях, индексируемых в Scopus, 5 – в трудах Всероссийских и Международных конференций, получено 4 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

**Личный вклад автора.** Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. В работах, опубликованных в соавторстве [41-57], лично соискателю принадлежат следующие результаты: [41] – предложенная в диссертации математическая модель и численный метод решения задачи нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией; в [42] – анализ алгоритмической сложности и вывод критериев устойчивости предложенного численного метода; в [43-44] – математическая модель

нестационарной теплопроводности и статистические модели аппроксимации уравнения нестационарной теплопроводности для частного случая нагрева стали; в [45-48] – математическая формализация и синтез предлагаемых моделей, подготовка данных, апробация, численные эксперименты; в [49-52] – разработка архитектуры и программного кода лицензируемого программного обеспечения; в [53-57] – постановка задачи, разработка решений и синтез математических моделей.

**Апробация.** Основные результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на международных и всероссийских конференциях и форумах: 15-я Международная конференция «Intelligent Systems» (INTELS'22, Москва, 2022); 15-я Мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2022, Санкт-Петербург, 2022); International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy efficiency SUMMA (Липецк, 2021, 2022, 2023); конференция с международным участием «Системы автоматизации (в образовании, науке и производстве) AS'2022» (Новокузнецк, 2022); 2022 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM) (Сочи, 2022), XVII-XIX Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами» (Москва, 2021; Челябинск, 2022, Воронеж, 2023); XVIII Всероссийская научно-практическая конференция «Современные проблемы горно-металлургического комплекса. Наука и производство» (Старый Оскол, 2021).

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и двух приложений. Список использованной литературы содержит 112 наименований. Текст диссертации состоит из 151 страница машинописного текста, включая 36 рисунков, 20 таблиц и 138 формул.

## **Глава 1 Анализ методов моделирования нестационарной теплопроводности в твердых телах**

Математическое моделирование тепловых полей в твердых телах различной геометрии находит свое применение во многих научно-технических областях. Примерами задач из такого рода областей можно считать:

- 1) моделирование нагрева твердых тел в тепловых агрегатах с целью оптимизации технологических процессов [1-8];
- 2) моделирование нагрева твердых тел вследствие экзотермических реакций с внутренними источниками тепла [9-11] с целью валидации физико-химических экспериментов;
- 3) моделирование нагрева композитных твердых тел с целью определения границ их прочностных свойств [12,58];
- 4) моделирование нагрева твердых тел из новых или слабо изученных композитных материалов с целью восстановления их теплофизических характеристик [13-14];
- 5) моделирование нагрева конструкционных частей механизмов с целью повышения эффективности их использования, например, поршневых двигателей [15-16];
- 6) моделирование нагрева конструкционных частей тепловых объектов с целью исследования влияния температуры на эффективность реализуемой теплотехнологии [17-18].

Изложенное выше, очевидно, не является полным списком приложений тепловых моделей нагрева твердых тел, но в достаточной мере иллюстрирует их актуальность.

Математическое моделирование тепловых полей на границах и в сечениях твердых тел – обширная область, предполагающая применение множества различных подходов и методов. Сузим эту область, рассмотрев только ту группы тепловых математических моделей, которые формализуют нагрев в высокотемпературной среде. Подходы к построению таких моделей,

условно, могут быть разделены на две большие группы: 1) моделирование нагрева с фазовым переходом в твердом теле; 2) моделирование нагрева без фазового перехода в твердом теле. Рассмотрим моделирование нагрева в твердом теле без фазового перехода как наиболее часто встречающийся вид математических моделей [19-21].

В классическом случае промоделировать температуру в твердом теле, а также на его границе можно при помощи стационарного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \nabla^2 T + F(\bullet) &= Q, \\ Q &= q_1 + q_2 + q_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\alpha = \lambda/(\rho \cdot c)$ , – это коэффициент температуропроводности, зависящий от теплопроводности, плотности и теплоемкости, м<sup>2</sup>/с;  $T$  – температура, °С;  $F(\bullet)$  – обобщенная функция, описывающая внутренние источники тепла;  $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$  – выражение оператора Лапласа в декартовых координатах;  $Q$  – внешний тепловой поток, Вт/м<sup>2</sup>;  $q_1, q_2$  и  $q_3$  – тепловые потоки вдоль нормалей поверхностей  $Ox$  и  $Oy$ , Вт/м<sup>2</sup>. Для твердого тела произвольной геометрии в двумерной постановке данная задача имеет следующий вид (рис.1).

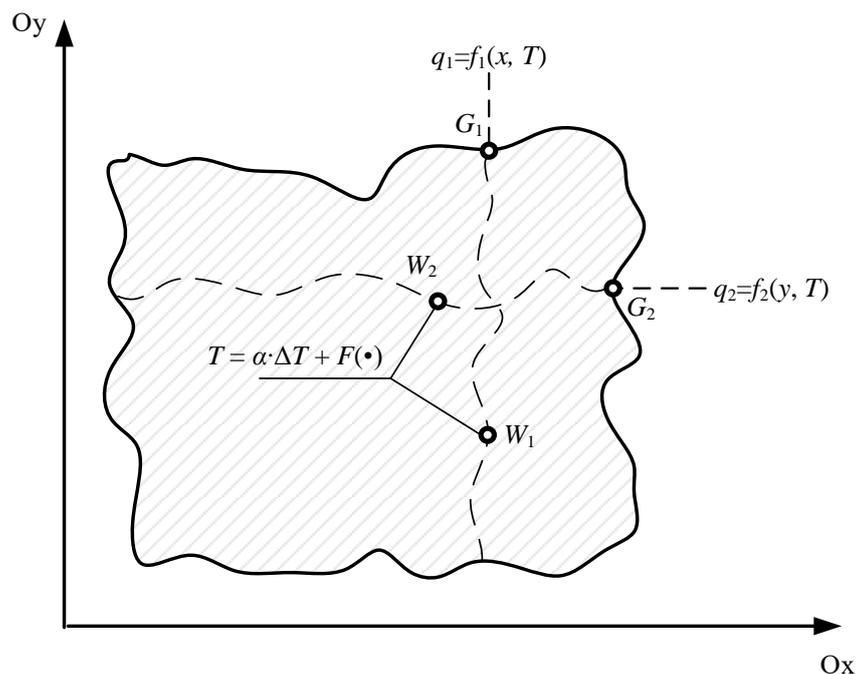


Рис. 1 – Геометрическая постановка задачи стационарной теплопроводности

В стационарном случае для получения аналитического решения необходимо определить конечный вид  $f_1(x, T)$  и  $f_2(y, T)$  и величину теплового потока в точках  $G_1$  и  $G_2$ . При известных величинах тепловых потоков на границах тела при помощи уравнения стационарной теплопроводности вычисляются температуры в точках  $W_1$  и  $W_2$ .

Конечная форма  $f_1(x, T)$  и  $f_2(y, T)$  описывается теми или иными граничными условиями, однако даже в случае нелинейных граничных условий математическая модель всё еще может быть найдена аналитически.

При рассмотрении высокотемпературного нагрева уравнение (1) усложняется. А именно, в нем возникает временная нестационарность, провоцирующая необходимость учитывать не только как менялась температура на поверхности или внутри твердого тела, но и как она изменялась в тех же точках с течением времени.

Формально временная нестационарность выражается в изменении величины теплового потока в точках  $G_1$  и  $G_2$ , и как следствие температур в  $W_1$  и  $W_2$  не только в зависимости от расположения этих точек в моделируемом пространстве, но и от их состояния во времени (рис.2).

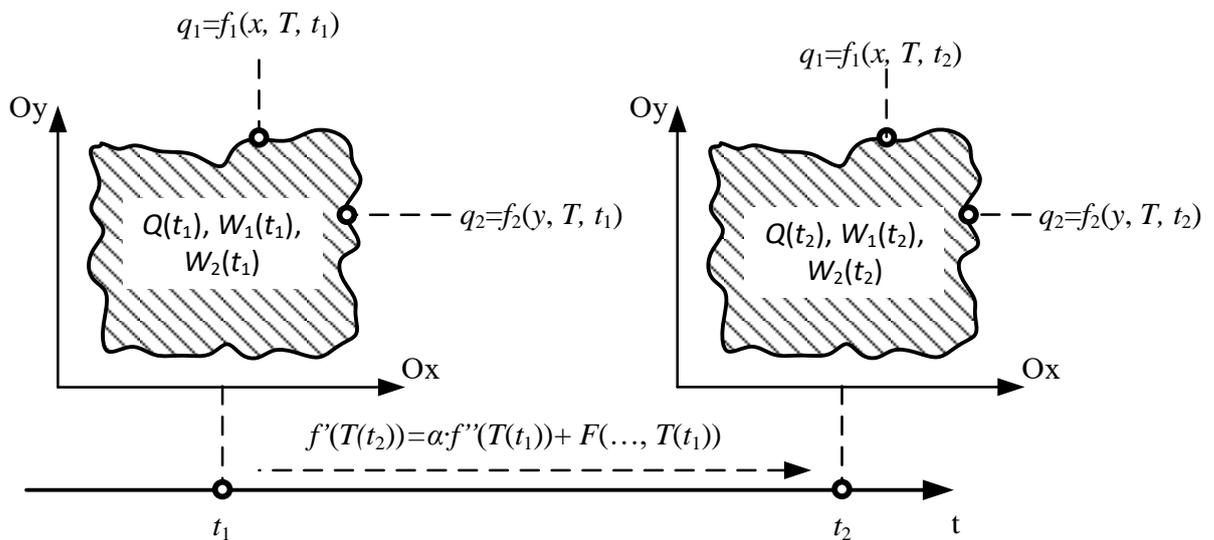


Рис. 2 – Принцип моделирования нестационарной теплопроводности

Для того, чтобы учесть при моделировании изменение температурного поля в твердом теле и на его границе, применяют особый дифференциальный закон нестационарной теплопроводности:

$$\dot{T} = \alpha \cdot \nabla^2 T + F(\bullet). \quad (2)$$

Здесь  $\nabla$  – это векторный дифференциальный оператор набла,  $T$  – температура нагреваемого материала,  $\dot{T}$  – производная температуры нагреваемого материала по времени, °С. Данный дифференциальный закон устанавливает однозначное соответствие между распределением температурного поля по пространству (в правой части) и его изменением во времени (в левой части) через некоторые теплофизические характеристики нагреваемого вещества (плотность, теплопроводность, теплоемкость), являющиеся составной частью коэффициента температуропроводности.

При описании нагрева при помощи уравнения (2) для того, чтобы получить конечную математическую модель, необходимо поставить и решить некоторую краевую задачу Коши. Наличие аналитического решения у данной задачи будет сильно зависеть от выбранных граничных условий:

1) граничные условия первого рода определяют значение температуры (одного единственного источника) на границах тела в каждый момент времени, но не определяют распределение температуры и величину теплового потока;

2) граничные условия второго рода задают величину теплового потока на границах тела и одну из температур в каждый момент времени (при двух источниках тепла), но не определяют распределение температуры и величину второй температуры;

3) граничные условия третьего рода описывают температуру окружающей среды и некоторый закон теплообмена с ней, но не описывают распределение температуры и величину теплового потока.

При моделировании высокотемпературного нагрева твердых тел наибольший интерес представляют граничные условия III-го рода из-за своей нелинейности и возможности учитывать нагрев излучением и конвекцией. При этом они обладают определенной нелинейностью, что делает их применение к математическим моделям на основе уравнения (2) нетривиальной задачей.

Аналитические решения дифференциального уравнения (2) для твердых тел простой геометрии (одномерный случай) хорошо известны [59]. В частности, точное аналитическое решение для нелинейных граничных условий III-го рода применимо к неограниченной пластине (3), неограниченному цилиндру (4) и шару (5).

$$\Theta'''(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot Bi}{Bi^2 - Bi + \mu_n^2} \cdot \frac{\cos(\mu_n X)}{\cos(\mu_n)} \cdot e^{[-(\mu_n)^2 Fo]}, \quad (3)$$

$$\Theta'''(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot Bi}{Bi^2 + \mu_n^2} \cdot \frac{J_0(\mu_n X)}{J_0(\mu_n)} \cdot e^{[-(\mu_n)^2 Fo]}, \quad (4)$$

$$\Theta'''(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot Bi}{Bi^2 - Bi + \mu_n^2} \cdot \frac{\sin(\mu_n X)}{X \cdot \sin(\mu_n)} \cdot e^{[-(\mu_n)^2 Fo]}. \quad (5)$$

Здесь  $\Theta'''$  – относительная безразмерная температура тела при граничных условиях III-го рода;  $Bi = \alpha \cdot R / \lambda$  – число Био, являющийся безразмерным коэффициентом теплоотдачи;  $R$  – характеристический размер твердого тела простой формы;  $J_0$  – функция Бесселя 1 рода нулевого порядка, имеющая табличные значения для большинства  $Bi$ ;  $\mu_n$  –  $n$ -й корень характеристического уравнения при граничных условиях III-го рода;  $Fo = \alpha \cdot \tau / R$  – критерий Фурье, описывающий безразмерное время для тел простейшей формы;  $X$  – безразмерная декартова координата произвольной точки пластины или шара.

В случае элементарной геометрии (одномерная постановка) имеются точные формулы аналитического расчета, которые позволяют рассчитать значение температуры в каждой произвольной точке пространства в некоторый момент времени. Для моделирования теплового потока на границе или внутри твердого тела при помощи точных аналитических формул придется выделить  $K$  точек, для которых необходимо будет вычислить  $n$  характеристических корней. Кроме прочего, придется рассматривать сложную постановку как совокупность простых постановок и отдельно решать проблему двойной аппроксимации (ситуация, когда в одной и той же точке для расчета возникает два значения температуры).

Из-за всего вышеизложенного такого рода математические модели оказываются алгоритмически неоправданно сложными и, как следствие, неэффективными. Ввиду данного факта, наибольшую применимость имеют численные методы расчета такого рода моделей. Данные методы базируются на идее приведения уравнения (2) к виду в частных производных и замене дифференциальных операторов на их численные аналоги [60].

На основании предварительного исследования было установлено, что для моделирование высокотемпературного нагрева твердых тел с временной нестационарностью применяют несколько методов:

1) методы конечных элементов (МКЭ), основанные на уравнениях тепловых балансов, наиболее известным из которых является «метод конечных (контрольных) объемов» или «зональный метод» [61, 62];

2) методы конечных разностей (МКР), основанные на сеточных схемах уравнений стационарного или нестационарного теплопереноса с заданными граничными условиями [19,23,63].

МКР и МКЭ – это методы приближённого численного решения физических задач. В их основе лежат две главные идеи: дискретизация исследуемого объекта на конечное множество элементов (разностей) и кусочно-элементная (разностная) аппроксимация исследуемых функций.

С точки зрения концепций методов МКЭ и МКР, они обладают рядом достоинств и недостатков, не зависящих от приложения. Так модели конечных разностей обладают следующими недостатками:

1) качество решения задачи зависит от выбранных разностных сетей;

2) не все сеточные представления являются устойчивыми;

3) построение конечно-разностной схемы зависит от свойств исходного дифференциального уравнения. Как следствие, метод имеет низкую степень обобщения.

При этом МКР имеет и ряд преимуществ:

1) для простых геометрий сеточное представление конечных разностей строится быстрее, чем элементная база МКЭ;

- 2) для большинства задач доказана устойчивость, а в некоторых случаях она является абсолютной;
- 3) наиболее эффективные подходы позволяют решение дифференциальных уравнений свести до решения системы алгебраических трехточечных линейных систем;
- 4) следствием из п.3 является возможность учитывать более сложные граничные условия из-за внутренней простоты расчетов модели.

Методы конечных элементов обладает следующим набором преимуществ:

- 1) конечное решение представляется в виде функции и значение в любой точке может быть вычислено сразу;
- 2) МКЭ – это проекционный метод, обладающий абсолютной устойчивостью;
- 3) подход позволяет работать с геометрическими объектами сложной формы;
- 4) некоторые из моделей МКЭ достаточно быстры в алгоритмическом смысле и более адаптированы для ЭВМ.

Недостатки данного подхода частично следуют из его преимуществ:

- 1) тепловые модели на основе МКЭ нельзя отнести к классу алгоритмических быстрых и менее сложных. Методы конечных объемов или площадей имеют большие циклы итеративного расчета в своей основе;
- 2) внутренняя сложность не всегда позволяет учитывать сложные граничные условия;
- 3) для двумерного случая метод является переусложненным аналогом МКР с такой же точностью решения, но большим временем ответа;
- 4) для упрощения вычислений приходится принимать более жесткие допущения, чем у метода конечных разностей.

Тем не менее, выбор метода и модели зависит от конечной цели моделирования, и нельзя однозначно сказать, какой из подходов является лучшим. Анализ литературы показал, что МКЭ подход, основанный на

уравнениях тепловых балансов, используют чаще, когда речь идет о комплексном моделировании процесса нагрева, при котором стараются учесть оптические, гидродинамические и химические аспекты нагревающей среды и самого твердого тела [64-66]. Модели конечных разностей же применяют, когда необходимо промоделировать распределение температуры на границе твердого тела и экстраполировать тепловое поле в его сечение.

Рассмотрим вышеизложенные методы в приложении к решению задачи высокотемпературного нагрева твердого тела без фазового перехода, начиная с конечно-элементных.

## 1.1 Конечно-элементные методы моделирования нестационарной теплопроводности в твердых телах

### 1.1.1 Метод контрольных объемов

Метод контрольных объемов (МКО) – это конечно-элементный метод моделирования, особенностью которого является однократный полный расчет всех потоков тепла в системе на основе фиксированных граничных условий [67].

Метод конечных объемов предоставляет некоторую абстракцию, которую можно применить к уравнению баланса любой величины ( $\varphi$ ), заключенной в конечном объеме  $\Omega$  и ограниченной поверхностью  $S = \sum S_k$  с внешней нормалью  $n$ :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\Omega + \sum_k \int_{S_k} \vec{n} * \vec{q} ds = \int_{\Omega} Q d\Omega, \\ \vec{q} = \rho \cdot \vec{V} \varphi - \alpha \nabla \varphi. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $q$  – вектор плотности потока величины  $\varphi$ , включающий конвективную и диффузионную составляющие,  $Q$  – плотность распределения объемных источников,  $V$  – вектор скорости,  $\rho$  – плотность среды,  $\alpha$  – коэффициент диффузии. В качестве  $\varphi$  может фигурировать, например, внутренняя энергия текущей среды, концентрация примеси, кинетическая энергия турбулентности, тепловая энергия и др.

Рассмотрим формализацию данного метода применимо к исследованию тепловых процессов [62,68]. В основе МКО для моделирования температуры лежит решение уравнения теплового баланса для некоторого конечного объема:

$$a_A l_A = a_x l_x + a_y l_y + a_z l_z + b_A, \quad (7)$$

где  $l_x, l_y, l_z$  – это интенсивности излучения на границах объема в направлении  $Ox, Oy$  и  $Oz$  соответственно;  $l_A$  – это результирующая интенсивность излучения внутри некоторого объема  $A$ ;  $a_x, a_y, a_z$  – это коэффициенты, зависящие от геометрии конечного объема  $A$  в направлении  $Ox, Oy$  и  $Oz$  соответственно;  $b_A$  – излучение источников, расположенных внутри исследуемого объема. Проиллюстрируем решение в двумерной постановке. Пусть имеется некоторая замкнутая область  $(\Delta\Omega) = (\Delta x) \times (\Delta y)$ , элементарные отрезки  $(\Delta x)$  и  $(\Delta y)$  делят область таким образом, чтобы на их пересечении образовались контрольные объемы  $(A_{x,y} \in \Omega)$  (рис.3). Представив уравнение (2) в частных производных и проинтегрировав его по контрольному объему  $A$  (в двумерном случае – это ячейка сети), получим уравнения вида (8).

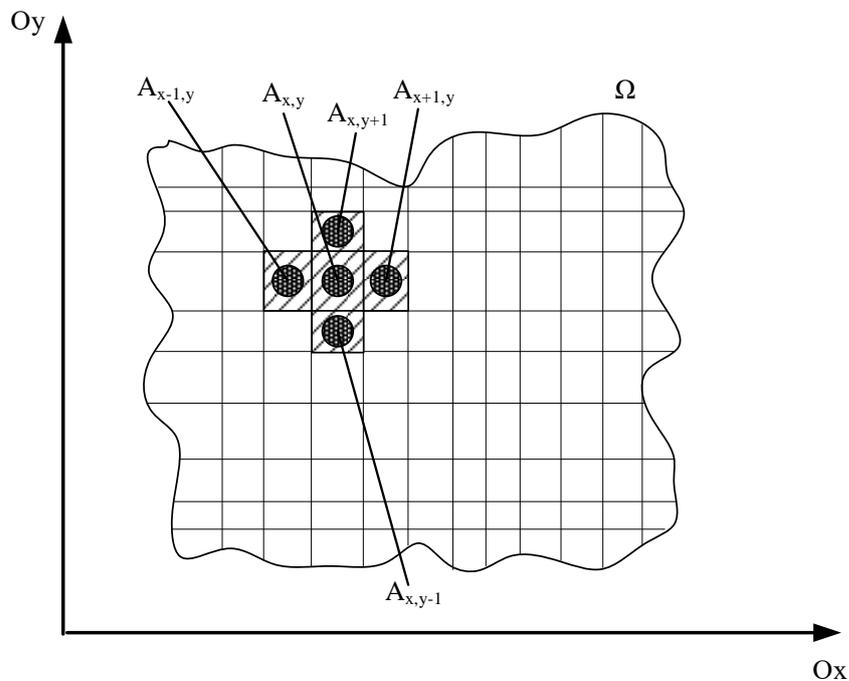


Рис. 3 – Схема разделения двумерной геометрии на контрольные объемы

$$\alpha \cdot \left[ \int_A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \cdot dy + \int_A \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx \cdot dy + \int_A F(\bullet) \right] = \int_t \frac{\partial T}{\partial t} dt. \quad (8)$$

В частных производных граничные условия III-го рода принимают вид нелинейного дифференциального уравнения (9). В данном случае оно определено для  $\partial T/\partial x$ , для  $\partial T/\partial y$  оно имеет аналогичный вид.

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \cdot (U(t) - T_{об}) + \varepsilon \cdot \sigma \cdot ([U(t)]^4 - T_{об}^4). \quad (9)$$

Здесь  $T_{об}$  – температура объекта,  $K$ ;  $U(t)$  – температура среды, определенная как некоторая функция от времени,  $K$ ;  $\kappa$  – коэффициент теплообмена,  $Вт/(м^2 \cdot K)$ ,  $\varepsilon$  – приведенная степень черноты,  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана, принятая равной  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ .

Зафиксируем время  $t=t_n$ , приведя для наглядности уравнения к локальной стационарности по времени, и, используя теорему о среднем, перепишем первое уравнение системы (7) в виде решения методом контрольного объема:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] \Delta y \Big|_{x=x_W} - \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] \Delta y \Big|_{x=x_E} - \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right] \Delta x \Big|_{y=y_N} - \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right] \Delta x \Big|_{y=y_S} = \\ & = - \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\alpha} \cdot F(\bullet) \Big|_{t=t_n}, \quad x_W, x_E, y_N, y_S \in A_{x,y} \end{aligned} \quad (10)$$

где  $x_W$  – это абсцисса левой границы ячейки;  $x_E$  – абсцисса правой границы ячейки,  $[x_W, x_E] \in a_x$ ;  $y_N$  – ордината верхней границы ячейки;  $y_S$  – ордината нижней границы ячейки,  $[y_N, y_S] \in a_y$ . Уравнение (10) описывает баланс тепла (7) в пределах выбранной ячейки в численном виде. Если правильно описать тепловые потоки между ячейками, начиная с тепловых потоков на границе тела, описываемые граничными условиями III-го рода, то получится система, составленная из уравнений (10), описывающих каждую ячейку в конечном объеме  $\Omega$ .

Данный подход имеет хорошую теоретическую точность [65, 67] и устойчивость, однако он обладает высокой вычислительной сложностью из-за необходимости множества итераций для определения объемных

коэффициентов ( $a_x, a_y, a_z$ ) на границах твердого тела для условий III-го рода (до 10000 итераций). При этом эта точность может оказаться недостижима в реальных условиях эксплуатации из-за необходимости принимать ряд допущений, а также в ситуациях с возможной сменой граничных условий [67].

Более быстрым и не менее точным аналогом МКО является зональный метод.

### 1.1.2 Зональный конечно-элементный метод

Зональный метод является вычислительно более быстрой альтернативой представленного ранее метода контрольных объемов. Суть данного метода состоит в разбиении замкнутого объема  $\Omega$  на значительно меньшее число точек и вычислении для них некоторой общей характеристики, неизменной при различных граничных условиях. Данный метод подробно изложен в работах Лисиенко В.Г., а также в работах Бухмирова В.В и Солнышкова Ю.С. [62,68].

Стационарной характеристикой зонального метода является, как правило, матрица размерностей. Данная квадратная матрица ( $N \times N$ , где  $N$  – это число выделенных точек) также называется матрицей обобщенных угловых коэффициентов излучения. Согласно работе [62], а также работам [65, 69] применение зонального метода для моделирования температурного поля начинается с выделения стационарных условий нагрева (которыми принимаются и температуры, что является существенным допущением). Далее идет выделение нестационарных свойств, таких как оптические (например, коэффициента поглощения). И наконец, следует вычисление матрицы обобщенных угловых коэффициентов на основании геометрии распределения точек по конечному объему при помощи следующего интегрального отношения:

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} e^{-\tau(dA_j, dA_i)} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi L^2} \cdot dA_j \cdot dA_i, \quad (11)$$

где  $dA_j, dA_i$  – это некоторые элементарные части контрольных объемов  $A_i$  и  $A_j$  на поверхности зон  $i$  и  $j$ ;  $\theta_i$  и  $\theta_j$  – это углы между нормальными, опущенными к

поверхностям, и некоторым тепловым излучением (как правило, принимаются  $90^\circ$ );  $-\tau(dA_j, dA_i)$  – оптическая толщина слоя среды на пути луча между площадками  $dA_j, dA_i$ .

Данный подход не позволяет в явном виде применить граничные условия III-го рода. Предлагается рассматривать конвективную составляющую нагрева как часть нагрева излучением. Авторы в работе [65] предлагают рассматривать компоненты газового теплоносителя как основные излучающие элементы. В работах [69] также не приводятся процессы явной формализации конвективного теплообмена.

Ключевой проблемой конечно-элементных методов как инструмента численного моделирования нелинейных дифференциальных уравнений является недоказанность теоремы Лакса-Мильграма [70-71] об эквивалентности. Следствием этого являются проблемы, возникающие при расчете граничных задач итерационными методами, связанные с отсутствием сходимости итераций. Для повышения устойчивости таких методов применяют нижнюю релаксацию, которая с математической точки зрения аналогична уменьшению шага по времени.

Метод на основе конечных разностей при использовании неявных разностных схем в меньшей мере подвержен данной проблеме. Далее он будет рассмотрен детальной.

## **1.2 Конечно-разностные методы моделирования нестационарной теплопроводности в твердых телах**

По аналогии с конечно-элементными методами, рассмотрим двумерную постановку уравнения нестационарной теплопроводности (2). В частных производных оно будет иметь вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \cdot F(\bullet). \quad (12)$$

Раскроем в дифференциальном уравнении (12) коэффициент температуропроводности и предположим, что в рассматриваемом твердом

теле нет внутренних источников тепла. Тогда уравнение (12) примет вид уравнения (13):

$$\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (13)$$

где  $\rho$  – плотность,  $кг/м^3$ ;  $\lambda$  – теплопроводность,  $Вт/(м \cdot ^\circ C)$ ;  $c$  – теплоемкость,  $Дж/(кг \cdot ^\circ C)$ . В зависимости от целей математического моделирования можно рассматривать либо отдельно границы твердого тела, либо границы и его сечение (двумерная постановка).

Пусть имеется двумерное сечение твердого тела произвольной геометрической формы. Согласно уравнению (13) необходимо выделить три размерности: две пространственные сети  $Ox$  и  $Oy$  и временную сеть  $Ot$ . Основная суть конечно-разностного метода очень похожа на принцип конечно-элементных подходов, однако вместо определенного контрольного объема со своими объемными коэффициентами здесь предлагается рассматривать температуру в точках некоторых сеточных схем.

Таким образом, расчет непрерывных частных производных уравнения (13) заменяется на их аппроксимацию в конечном наборе точек при помощи конечно-разностных аналогов [24]. Рассмотрим данный процесс детальней.

Замостим временную ось  $Ot$  одномерной сетью с равномерным шагом:

$$w_\tau = \{n = \tau \cdot k_i \mid k_i = \overline{0, N}, \tau \cdot N = t_{\max}\}, \quad (14)$$

где  $N$  – количество узлов временной сети,  $t_{\max}$  – максимальный временной горизонт;  $\tau$  – некоторая определенная разница между моментом времени  $t$  и  $t+1$ , которую назовем “шагом” сети.

Описываемое уравнением (13) двумерное пространство будет иметь составной вид  $\bar{G}_{xy} = G_{xy} + \Gamma_{xy}$ , где  $\Gamma$  – это граница пространства, а  $G$  – это внутренняя его часть. Метод конечных разностей предполагает, что  $\bar{G}_{xy}$  может быть замощено дискретной сетью  $\bar{W}_{xy}$ , причем такой, что  $\bar{W}_{xy} = w_{xy} + \gamma_{xy}$ , где  $w_{xy}$  – это дискретная сеть, покрывающая  $G_{xy}$ , а  $\gamma_{xy}$  – это дискретная сеть, покрывающая  $\Gamma_{xy}$ .

Пусть двумерная дискретная сетка представлена в следующем виде:  $w_{xy} = w_{hx} + w_{hy}$ , такая, что описывается системой (15). Такой вид пространственной сети называется локально-одномерным и часто применяется при конечно-разностном моделировании нестационарной теплопроводности в двумерном представлении [25, 60].

$$w_{xy} = \begin{cases} w_{hx} = \{x_k = h_x \cdot k_x \mid k_x = \overline{1, H-1}, h_x \cdot H = x_{\max}\}, \\ w_{hy} = \{y_q = h_y \cdot q_y \mid q_y = \overline{1, W-1}, h_y \cdot W = y_{\max}\}, \end{cases} \quad (15)$$

где  $H$  и  $W$  – количество шагов сетки вдоль соответствующих осей,  $x_{\max}$  и  $y_{\max}$  – это границы пространства  $\vec{G}_{xy}$  по  $Ox$  и  $Oy$  соответственно;  $h_x$  – некоторая величина между двумя произвольными точками  $x$  и  $x+1$ , которая названа “шагом” по сети вдоль  $Ox$ ;  $h_y$  – некоторая величина между двумя произвольными точками  $y$  и  $y+1$ , которая названа “шагом” по сети вдоль  $Oy$ . Аналогичным образом описывается и граничная сеть:  $\gamma_{xy} = \gamma_{hx} + \gamma_{hy}$ :

$$\gamma_{xy} = \begin{cases} \gamma_{hx} = \{x_k = h_x \cdot k_x \mid k_x = 0, H, h_x \cdot H = x_{\max}\}, \\ \gamma_{hy} = \{y_q = h_y \cdot q_y \mid q_y = 0, W, h_y \cdot W = y_{\max}\}. \end{cases} \quad (16)$$

Для дальнейшего рассмотрения примем равномерность локально-одномерных пространственных сетей друг относительно друга. Это значит, что  $H=W$  и  $x_{\max} = y_{\max}$ . Отсюда следует, что количество “шагов” вдоль пространственных сетей  $Ox$  и  $Oy$  эквивалентно друг другу ( $\Delta x = \Delta y \equiv h_x = h_y$ ).

Для получения конечно-разностной модели на основе уравнения (13), осталось заменить в нем непрерывные дифференциальные операторы на их конечно-разностные функции. Сделав такие замены в рассматриваемом уравнении, можно получить уравнения вида (17). Их вывод подробно изложен, в том числе, в работах А.А. Самарского [25, 60], там же предложен способ решения, основанный на приведении уравнения (17) к локально-одномерному виду в соответствии с видом пространственных сетей при помощи метода покоординатного расщепления [73].

$$\rho \cdot c \frac{T_{x,y}^{t+1} - T_{x,y}^t}{\tau} = \lambda \cdot \left[ \frac{T_{x+1}^{t+1} - 2 \cdot T_x^{t+1} + T_{x-1}^{t+1}}{h_x^2} + \frac{T_{y+1}^{t+1} - 2 \cdot T_y^{t+1} + T_{y-1}^{t+1}}{h_y^2} \right], \quad (17)$$

где  $T_{x,y}^t$  – это значение температуры в точке  $(x,y)$  в момент времени  $t$ .

Суть покоординатного расщепления заключается в разделении непрерывного двумерного теплового поля на границе объема и в его сечении на два локально-одномерных поля, определенных на целом временном слое  $(t+1)$  и половинчатом временном слое  $(t+1/2)$ . В данном случае это означает, что расчет температуры в узлах сети вдоль оси  $Ox$  ведется на промежуточных узлах временной сети  $(n+1/2)$ , а расчет температуры в узлах сети вдоль оси  $Oy$  ведется между целыми узлами временной сети  $(n+1)$ .

Такой способ обеспечивает двойную аппроксимацию в точке и решает проблему, при которой в один момент времени  $n+1$  в точке  $(x, y)$  находится две температуры [73]. В результате покоординатного расщепления уравнения (17) получится система вида:

$$\begin{cases} \rho \cdot c \frac{T_{x_k, y_q = const}^{n+\frac{1}{2}} - T_{x_k, y_q = const}^n}{\tau} = \lambda \cdot \frac{T_{x_k+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot T_{x_k}^{n+\frac{1}{2}} + T_{x_k-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}, \\ \rho \cdot c \frac{T_{x_k = const, y_q}^{n+1} - T_{x_k = const, y_q}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \lambda \cdot \frac{T_{y_q+1}^{n+1} - 2 \cdot T_{y_q}^{n+1} + T_{y_q-1}^{n+1}}{h_y^2}. \end{cases} \quad (18)$$

Модель на основании уравнений (17)-(18) с граничными условиями III-го рода будет иметь следующую геометрическую постановку (рис.4), где  $U_1(t)$  – температура теплового поля, направленного по нормали вдоль оси  $Ox$  в момент времени  $t$ ,  $K$ ;  $U_2(t)$  – температура теплового поля, направленного по нормали вдоль оси  $Oy$  в момент времени  $t$ ,  $K$ ;  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  – коэффициенты теплообмена полей с  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$  соответственно,  $Bm/(m^2 \cdot K)$ .

На сегодняшний день, фиксируя конечный вид исследуемого пространства, модель на основании (17) в представленной геометрической постановке (рис.4) часто применяется в различных задачах, от инженерно-технических до научных [19-21, 23, 27-31, 36, 41-47]. В том числе благодаря тому, что пути её численного решения хорошо известны [24-26, 60, 73].

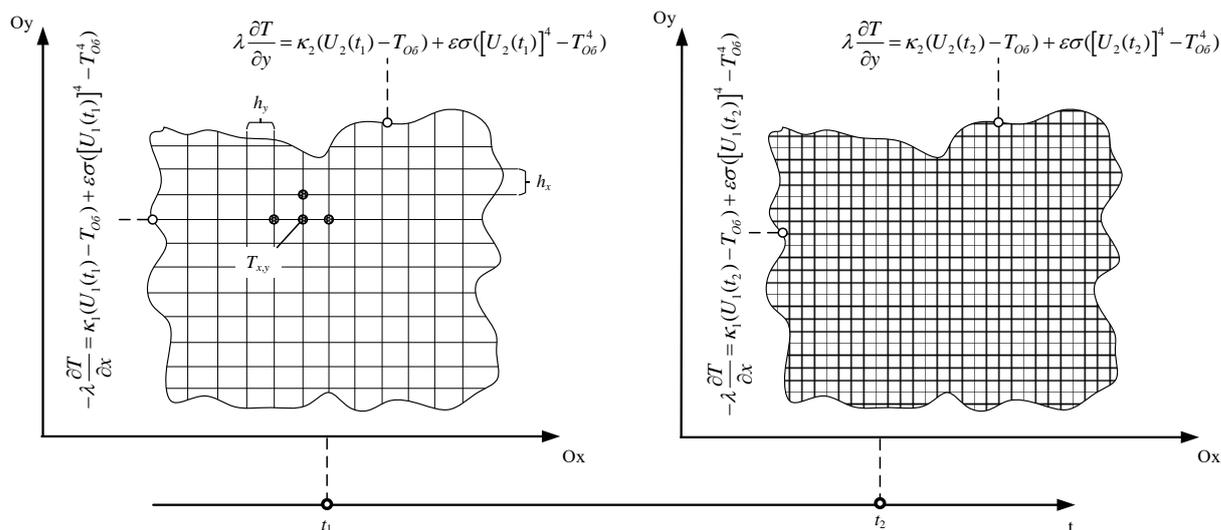


Рис. 4 – Геометрическая постановка задачи

Существует два способа расчета температуры в узлах пространственных сетей конечно-разностных моделей: явный, когда температура в точке  $x+1$  определяется температурой в точке  $x$  (аналогично для  $Oy$ ) и неявный, когда температура в точке  $x$  определяется температурой в точке  $x+1$ . Для явных разностных схем имеет место аналогичная МКО проблема устойчивости и сходимости итеративных расчетов при использовании нелинейных граничных условий. Из-за чего приходится подбирать размеры шагов по пространству и по времени. Однако эта проблема здесь не настолько критична, так как имеют место неявные разностные планы, для которых доказана сходимость, и которые обладают абсолютной устойчивостью [74].

### 1.3 Выводы по главе

Каждый из рассмотренных ранее подходов обладает своим набором достоинств и недостатков, которые зависят от вида дифференциального закона, лежащего в основе конечного решения. Рассматривая их приложения к моделям нестационарной теплопроводности, можно выделить главные достоинства и недостатки.

Метод контрольных объемов.

Достоинства:

- 1) обладает теоретически самой высокой точностью расчета среди остальных численных методов;
- 2) обладает высокой скоростью расчета на ЭВМ в случае, если имеется возможность вычислить тепловое поле на границе твердого тела заранее, и оно относительно стационарно (условия I и II-го рода);
- 3) наиболее полно описывает тепловое поле внутри твердого тела, аппроксимируя его не точками, а конечными (контрольными) объемами.

Недостатки:

- 1) проблема устойчивости при использовании нелинейных граничных условий. Это приводит к необходимости в каждом отдельном случае подбирать размерность шагов по времени индивидуально под параметры пространственного замощения;
- 2) ввиду предыдущего недостатка приходится рассматривать нестационарный нагрев как локально-стационарный с ограниченным сверху количеством шагов по времени;
- 3) ограничения сверху на количество шагов по времени приводит к тому, что итоговая точность модели на основании метода контрольных объемов сильно отличается от теоретической.

Зональный метод.

Достоинства:

- 1) быстрее метода конечных объемов при расчете нелинейных граничных условий за счет выделения в них общей компоненты и её предварительного расчета;
- 2) как и метод конечных объемов, более полно описывает тепловые поля в твердом теле из-за того, что наследует свойства конечно-элементного подхода;

3) более устойчив за счет отсутствия итеративных расчетов в структуре самого численного метода. Все такие расчеты вынесены в предварительную прогонку, определяющую общие коэффициенты теплового поля на границах.

Недостатки:

1) выделение общей характеристики теплового поля на границе при граничных условиях III-го рода сильно их упрощает. Конвективный теплообмен становится поправочным коэффициентом к эмиссионной составляющей;

2) не рассматривает нестационарный нагрев как локально-стационарный, но по-прежнему имеет верхнюю границу устойчивости – количество шагов вдоль временной оси – определенную размерностью пространственных замощений;

3) попытка подвинуть ограничение выше путем уменьшения контрольных объемов и увеличения их количества делает модель слишком медленной для режима реального времени. Уменьшение количества шагов вдоль временной оси снижает точность модели.

Конечно-разностный метод.

Достоинства:

1) рассматривает тепловые поля на границе и внутри твердого тела как набор дискретных точек, что позволяет применить к разным точкам разные граничные условия;

2) в неявной разностной схеме абсолютно устойчив и количество шагов по пространству не зависит от количества шагов по времени;

3) обладает эффектом двойной аппроксимации в точке при рассмотрении двумерного случая, что повышает общую точность конечной модели.

Недостатки:

1) в явной разностной схеме имеет аналогичные предыдущим методам проблемы с устойчивостью;

2) достаточно медленный метод расчета, качество которого сильно зависит от количества шагов по пространству и времени. Несмотря на то, что имеет полиномиальный асимптотический класс сложности, при больших размерностях сетей оказывается неспособен работать в режиме реального времени.

По совокупности достоинств и преимуществ, конечно-разностные подходы моделирования нестационарной теплопроводности наилучшим образом подходят для описания высокотемпературного нагрева твердых тел, что подтверждается обилием практических приложений, приводимых ранее.

Несмотря на это, для всего класса тепловых моделей нестационарной теплопроводности, описывающих высокотемпературный нагрева, существует общая проблема адаптации модели к теплофизическим параметрам твердого тела и условиям теплообмена.

Теплофизические параметры, такие как теплоемкость ( $c$ ), теплопроводность ( $\lambda$ ) и плотность ( $\rho$ ), представленные напрямую в уравнении (17) или необходимые для расчета коэффициента температуропроводности в уравнениях (8) и (10), необходимо определять как функциональные зависимости от температуры, чтобы сделать модель более адекватной к формализуемому процессу нагрева. Кроме того, граничные условия III-го рода также нуждаются в адаптации, что делает решение проблемы нетривиальным. Более детально проблема адаптации будет рассмотрена в конце второй главы, однако уже на данном этапе очевидно, что имеется несколько путей её решения, например, путем восстановления заявленных теплофизических зависимостей посредством некоторых внешних моделей. Такой вид адаптации называется “явный” и он обладает рядом недостатков, которые предлагается рассмотреть детальной на примере математической модели нестационарной теплопроводности, определенной в двумерном твердом теле произвольной геометрии.

## Глава 2 Адаптация моделей нестационарной теплопроводности

Целью данной главы является демонстрация проблем классического подхода к решению проблемы адаптации моделей нестационарной теплопроводности к нагреваемому твердому телу и условиям нагрева. Под “классическим” понимается “явное” восстановление правых частей (19) при помощи внешних моделей.

$$\lambda = f_{\lambda}(T); c = f_c(T); \rho = f_{\rho}(T); \kappa = f_{\kappa}(T) \quad (19)$$

Данная процедура необходима при моделировании нагрева в среде высоких температур, когда заявленные в (19) параметры в твердом теле, а также на его границе изменяются достаточно ощутимо. Такого рода адаптация проводится для того, чтобы обеспечить модели более высокую точность расчетов в рамках конкретного физического процесса, что необходимо для её практического применения. Важно понимать, что чем точнее будут подобраны функции в правых частях (19), тем точнее будет модель.

Перед тем как детально разобрать на примере предлагаемые “классические” подходы к решению проблемы адаптации и выделить основные недостатки, необходимо рассмотреть математическую модель нестационарной теплопроводности детальней.

### 2.1 Численное решение модели нестационарной теплопроводности

Рассмотрим некоторое двумерное пространство, покрытое ортогональными пространственными сетями с равномерным шагом (рис.5). При этом в качестве сеточной схемы будем использовать неявную сеточную схему, где расчет температуры будет вестись справа налево (по оси  $Ox$ ) и снизу вверх (по оси  $Oy$ ) с применением метода прямой и обратной прогонки.

Метод прямой и обратной прогонки (известный также, как алгоритм Томаса) был представлен И. М. Гельфандом и О. В. Локуциевским в 60-х годах XX-го века и представляет собой механизм поэтапного исключения неизвестных при расчете трехдиагональных СЛАУ [75].

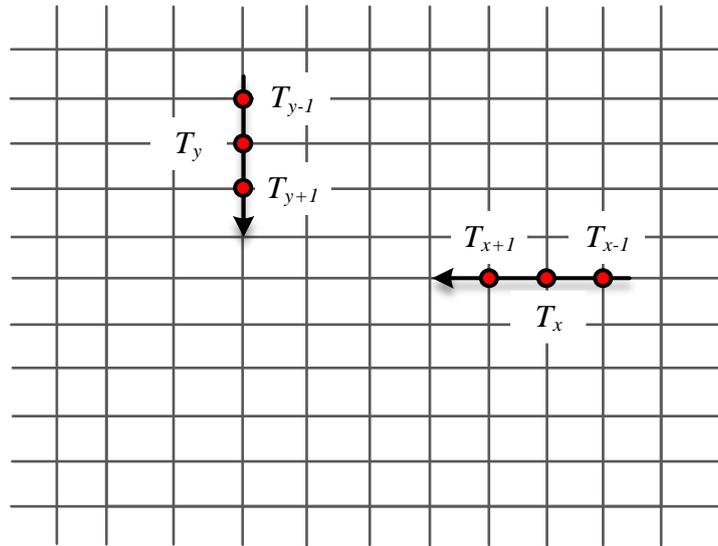


Рис. 5 – Двумерное пространство с ортогональными сетями

Рассмотрим данный метод детальней. Согласно имеющейся теории разностных схем, на неявной разностной схеме численное решение на основе системы (18) может быть представлено в виде системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} A_x \cdot T_{x+1}^{n+\frac{1}{2}} - B_x \cdot T_x^{n+\frac{1}{2}} + C_x \cdot T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}} = F_x, \\ A_y \cdot T_{y+1}^{n+1} - B_y \cdot T_y^{n+1} + C_y \cdot T_{y-1}^{n+1} = F_y. \end{cases} \quad (20)$$

В системе (20) каждое из уравнений представляет унифицированную систему трехточечных линейных уравнений второго порядка для  $x \in [1, H]$ ,  $y \in [1, W]$ .  $A, B, C$  и  $F$  – это некоторые коэффициенты собственных СЛАУ. Таким образом при переходе к численному методу решения краевой задачи нестационарной теплопроводности решение дифференциальных уравнений заменяется на решение систем из алгебраических уравнений.

Метод прямой и обратной прогонки предполагает, что собственные СЛАУ системы (20) могут быть упрощены до уравнений первого порядка при помощи введения двух коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , называемых прогоночными. В результате, если выразить каждое из уравнений СЛАУ (20) относительно  $T_x$  и  $T_y$  соответственно, то получится следующая система:

$$\begin{cases} T_x^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_x \cdot T_{x+1}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_x, \\ T_y^{n+1} = \alpha_y \cdot T_{y+1}^{n+1} + \beta_y. \end{cases} \quad (21)$$

Теперь, если уменьшить индекс по  $x$  и  $y$  на единицу в уравнениях системы (21) и подставить их обратно в (20) на места  $T_{x-1}$  и  $T_{y-1}$ , то получим следующее решение:

$$\begin{cases} A_x \cdot T_{x+1}^{n+\frac{1}{2}} - B_x \cdot T_x^{n+\frac{1}{2}} + C_x \cdot \alpha_{x-1} \cdot T_x^{n+\frac{1}{2}} + C_x \cdot \beta_{x-1} = F_x, \\ A_y \cdot T_{y+1}^{n+1} - B_y \cdot T_y^{n+1} + C_y \cdot \alpha_{y-1} T_y^{n+1} + C_y \cdot \beta_{y-1} = F_y. \end{cases} \quad (22)$$

Таким образом получается избавиться от  $T_{x-1}$  и  $T_{y-1}$  в уравнениях системы (20), что позволяет выразить каждое из уравнений системы (22) относительно  $T_x$  и  $T_y$  однозначно:

$$\begin{cases} T_x^{n+\frac{1}{2}} = \frac{A_x}{B_x - C_x \cdot \alpha_{x-1}} T_{x+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{C_x \cdot \beta_{x-1} - F_x}{B_x - C_x \cdot \alpha_{x-1}}, \\ T_y^{n+1} = \frac{A_y}{B_y - C_y \cdot \alpha_{y-1}} T_{y+1}^{n+1} + \frac{C_y \cdot \beta_{y-1} - F_y}{B_y - C_y \cdot \alpha_{y-1}}. \end{cases} \quad (23)$$

Из системы (23) можно определить формулы для расчета прогоночных коэффициентов:

$$\begin{cases} \alpha_x = \frac{A_x}{B_x - C_x \cdot \alpha_{x-1}}; \beta_x = \frac{C_x \cdot \beta_{x-1} - F_x}{B_x - C_x \cdot \alpha_{x-1}}, \\ \alpha_y = \frac{A_y}{B_y - C_y \cdot \alpha_{y-1}}; \beta_y = \frac{C_y \cdot \beta_{y-1} - F_y}{B_y - C_y \cdot \alpha_{y-1}}. \end{cases} \quad (24)$$

Найти значения коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $F$  в любой момент времени можно согласно следующим соотношениям:

$$A_l = C_l = \frac{\lambda(T)}{h_l^2}; B_l = \frac{2 \cdot \lambda(T)}{h_l^2} + \frac{\rho(T) \cdot c(T)}{\tau}; F_l = -\frac{\rho(T) \cdot c(T)}{\tau} \cdot T_l^n. \quad (25)$$

Таким образом метод прямой и обратной прогонки представляет собой получение прогоночных коэффициентов на основании уравнений (24), а затем использования их для обратного итеративного расчета температуры согласно системе (21). Тем не менее, для выполнения прямой и обратной прогонки необходим расчет начальных значений в  $x = 0$  и  $y = 0$ .

Рассмотрим получение начальных значений прогоночных коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  на основании граничных условий III-го рода (9).

Поскольку каждое из уравнений МКР (18) представляет собой локально-одномерную конечно-разностную схему, уравнения для получения значений начальных прогоночных коэффициентов и начальных значений температур находятся исходя из постановки краевой задачи. Здесь и далее будем опираться на геометрию задачи, представленную ранее на рисунке 4. Рассмотрим решение, начиная с модели расчета вдоль оси  $Ox$ .

Граничные условия (9) являются нелинейными из-за наличия теплообмена Стефана-Больцама в составе его правой части. Ввиду данного факта будем использовать  $O(h^2)$  погрешность дискретизации. Возьмем локально-одномерное уравнение расчета температуры вдоль оси  $Ox$  из системы (18), и разложим имеющуюся температуру  $T_x$  в ряд Тейлора в окрестностях искомой точки  $x = 0$  до членов второго порядка относительно  $h$ :

$$T_x^{n+\frac{1}{2}} = T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}} + h_x \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{h_x^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{x=0}^{n+\frac{1}{2}} + O(h^2). \quad (26)$$

Выразив всё в том же локально-одномерном уравнении вторую частную производную по  $x$ , подставим её в (26), получим разложение вида:

$$T_x^{n+\frac{1}{2}} = T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}} + h_x \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\rho \cdot c \cdot h_x^2}{2 \cdot \lambda} \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x=0}^{n+\frac{1}{2}} + O(h^2). \quad (27)$$

Выразим (27) относительно частной производной температуры по  $x$ :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{T_x^{n+\frac{1}{2}} - T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} - \frac{\rho \cdot c \cdot h_x}{2 \cdot \lambda} \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x=0}^{n+\frac{1}{2}} + O(h^2). \quad (28)$$

Далее произведем замену частной производной температуры по времени на её конечно-разностный аналог вдоль сети (15):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{T_x^{n+\frac{1}{2}} - T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} - \frac{\rho \cdot c \cdot h_x}{2 \cdot \lambda} \cdot \frac{T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}} - T_{x-1}^n}{\tau}. \quad (29)$$

Теперь необходимо обратиться к нелинейному граничному условию и, выразив его также относительно  $\partial T / \partial x$ , подставить в (29):

$$\frac{T_x^{n+\frac{1}{2}} - T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} - \frac{\rho \cdot c \cdot h_x}{2 \cdot \lambda} \cdot \frac{T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}} - T_{x-1}^n}{\tau} = \frac{\kappa_1}{\lambda} (T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}} - T_1) - \frac{\varepsilon_1 \sigma}{\lambda} ([T_1]^4 - [T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}}]^4). \quad (30)$$

Выразив равенство (30) относительно  $T_{x-1}$  и увеличив индекс на единицу, получим трехточечное уравнение вида (20) в следующем представлении:

$$\begin{aligned} T_x^{n+\frac{1}{2}} = & \frac{2 \cdot \lambda \cdot \tau}{\Theta} \cdot T_{x+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\rho \cdot c \cdot h_x^2}{\Theta} \cdot T_x^n + \frac{2 \cdot \tau \cdot \kappa_1 \cdot h_x}{\Theta} T_1 + \\ & + \frac{2 \cdot \tau \cdot \varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot h_x}{\Theta} ([T_1]^4 - [T_x^{n+\frac{1}{2}}]^4), \end{aligned} \quad (31)$$

где  $\Theta = \rho \cdot c \cdot h_x^2 + 2 \cdot \tau \cdot (\lambda + \kappa_1 \cdot h_x)$ .

Отсюда получаем следующую систему для расчета прогоночных коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  для точки  $x = 0$ :

$$\begin{cases} \alpha_{x=0} = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \tau}{\Theta}, \\ \beta_{x=0} = \frac{\rho \cdot c \cdot h_x^2}{\Theta} \cdot T_x^n + \frac{2 \cdot \tau \cdot \kappa_1 \cdot h_x}{\Theta} T_1 + \frac{2 \cdot \tau \cdot \varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot h_x}{\Theta} ([T_1]^4 - [T_x^{n+\frac{1}{2}}]^4). \end{cases} \quad (32)$$

Используя уравнения системы (32), получается рассчитать прогоночные коэффициенты для  $x = 0$ , которые далее используются в формулах прямой прогонки (24). Для обратной прогонки необходимо определить величину температуры на границе, пользуясь также граничными условиями. Для рассматриваемого случая движения вдоль  $Ox$  потребуется рассмотреть правое граничное условие. Пусть на правой границе твердого тела выполняются граничные условия II-го рода с известной величиной теплового потока  $q_2$ . Для определения уравнения начальной температуры на границе с дискретизацией условий с погрешностью  $O(h^2)$  необходимо выполнить разложение в ряд Тейлора  $T_x$  в окрестностях самой крайней точки сети ( $x = H$ ). Выполнив операции, аналогичные (26) – (29), получим следующее уравнение:

$$-\frac{q_2}{\lambda} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=H}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{T_x^{n+\frac{1}{2}} - T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{\rho \cdot c \cdot h_x^2}{2 \cdot \lambda} \cdot \frac{T_x^{n+\frac{1}{2}} - T_x^n}{\tau}. \quad (33)$$

Выразив (33) относительно  $T_x^{n+\frac{1}{2}}$ , получим следующее уравнение для расчета температуры на границе:

$$T_{x=H}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \tau \cdot \lambda \cdot \beta_{x-1} - 2 \cdot \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \tau \cdot h_x \cdot q_2 + h_x^2 \cdot \lambda \cdot T_x^n}{h_x^2 \cdot \lambda + 2 \cdot \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \tau \cdot \lambda \cdot (1 - \alpha_{x-1})}. \quad (34)$$

Для нахождения начальных значений прогоночных коэффициентов для модели расчета вдоль оси  $Oy$  необходимо использовать нижние граничные условия, а для нахождения значений температур на границе – верхние. Дискретизация аналогична рассмотренной выше с применением разложения в ряд Тейлора сначала вокруг точки  $y = 0$ , затем в окрестностях некоторой крайней точки ( $y = W$ ). При данном подходе получаем систему для расчета начальных прогоночных коэффициентов для модели вдоль  $Oy$ :

$$\begin{cases} \alpha_{y=0} = \frac{2 \cdot \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \tau}{h_y^2 + 2 \cdot \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \tau}, \\ \beta_{y=0} = \frac{h_y^2 \cdot T_{y=0}^n}{h_y^2 + 2 \cdot \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \tau} + \frac{2 \cdot \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \tau \cdot h_y \cdot q_2}{\lambda \cdot (h_y^2 + 2 \cdot \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \tau)}, \end{cases} \quad (35)$$

и уравнение для расчета начальных температур на границе:

$$T_{y=W}^{n+1} = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \tau \cdot \beta_{y_{q-1}} + 2 \cdot \tau \cdot \kappa_2 \cdot h_y \cdot T_2 + \rho \cdot c \cdot h_y^2 \cdot T_{y_q}^n + 2 \cdot \tau \cdot \varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot h_y ((T_2)^4 - (T_{y_q}^n)^4)}{2 \cdot \tau \cdot \lambda \cdot (1 - \alpha_{y_{q-1}}) + 2 \cdot \tau \cdot \kappa_2 \cdot h_y + \rho \cdot c \cdot h_y^2}. \quad (36)$$

Таким образом расчет модели заключается в получении значений начальных прогоночных коэффициентов для моделей  $Ox$  и  $Oy$  по системам (32) и (35), затем расчет граничных температур по уравнениями (34) и (36), соответственно. Для получения распределения температуры внутри всей пространственной сети применяют уравнения системы (20).

Известно, что неустранимая ошибка модели нестационарной теплопроводности с численным решением, описанным выше, будет иметь порядок  $O(h^2) + O(\tau)$ . Как правило, такая ошибка дополняется на практике

неустранимой погрешностью адаптации, в частности ошибками внешних моделей “явной” адаптации к теплофизическим коэффициентам нагреваемого твердого тела и условиям теплообмена на границе.

В таком случае ошибка, которую несут в себе внешние модели “явной” адаптации, не может быть устранена увеличением количества узлов пространственных и временных сетей. Кроме этого, задача адаптации является нетривиальной в том числе из-за отсутствия истинных формул расчета теплофизических величин. Это приводит к невозможности напрямую оценить величину ошибки “явной” адаптации и применить подходы к её уменьшению.

Рассмотрим проблему адаптации детальней.

## **2.2 Проблема адаптации модели нестационарной теплопроводности к теплофизическим параметрам твердого тела**

Уравнение (17) является универсальным в плане рассматриваемой геометрии. Задав область, как некоторую кусочно-постоянную функцию от ортогональных координат, можно рассматривать нагрев в твердом теле по сечению или его границам с любой произвольной геометрией.

Однако такие математические модели нестационарной теплопроводности по определению одноименного дифференциального закона (2) не могут быть универсальны в плане рассматриваемых теплофизических величин нагреваемого твердого тела.

Три основных теплофизических параметра (плотность ( $\rho$ ), теплоемкость ( $c$ ) и теплопроводность ( $\lambda$ )), как было сказано ранее, должны быть формализованы. Степень их формализации зависит от моделируемых условий, в том числе условий теплообмена на границе. Данные параметры могут быть формализованы, как: 1) статические значения, когда нагрев происходит в относительно небольшом диапазоне температур и температурным дрейфом данных характеристик можно пренебречь; 2) динамические, когда нагрев происходит в широком диапазоне температур и требуется учитывать дрейф

данных характеристик в зависимости от текущей температуры тела для сохранения адекватности модели протекающему процессу.

Рассматривая высокотемпературный нагрев твердых тел, естественным будет динамический характер формализации теплофизических величин. В начале данной главы рассматривались четыре параметра (19), три первых из них ( $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c$ ) – теплофизические параметры нагреваемого твердого тела, четвертый параметр ( $\kappa$ ) – коэффициент теплообмена на границе твердого тела. Процессы поиска законов изменения параметров (19) для отдельных видов твердых тел или их групп являются нетривиальными задачами, характерными для практического приложения вышеизложенных моделей нестационарной теплопроводности. Аналитические исследования могут принимать допущения о качестве формализации данных параметров, которые при практической реализации модели для решения инженерной или научно-технической задачи могут оказаться очень грубыми.

На сегодняшний день существует несколько основных направлений решения проблемы “явной” адаптации как для определения законов изменения теплофизических величин твердого тела, так и законов изменения коэффициента теплообмена.

Рассмотрим предлагаемые подходы к решению задачи адаптации к теплофизическим параметрам нагреваемого тела детальней. На сегодняшний день внешние модели “явной” адаптации, как правило, получают путем аппроксимации дискретных замеров соответствующих величин, полученных из технической справочной литературы. В частности, когда речь идет об адаптации к одному единственному твердому телу, то прибегают к восстановлению его теплофизических коэффициентов, опираясь на дискретные замеры соответствующих величин для материала, из которого оно состоит. Распространенным способом является применение линейных регрессий [76]. Такие регрессионные уравнения должны описывать изменения теплофизических параметров твердого тела в каждой точке пространственной

и временной сети. Наиболее часто встречаются модели на основании полиномиальных регрессионных уравнений [55, 77]:

$$f(T_{x,y}^t) = \beta_0 + \left( \sum_{i=1}^p \beta_i \cdot [T_{x,y}^t]^i \right) + \varepsilon_f. \quad (37)$$

Здесь  $T_{x,y}^t$  – температура в точке  $(x,y)$  в момент времени  $t$ ;  $f(T_{x,y}^t)$  – функция, описывающая изменение теплофизической величины твердого тела от температуры в точке;  $\beta_0$  – это свободный член регрессионного отношения;  $\beta_i$  – это  $i$ -й коэффициент регрессии;  $\varepsilon_f$  – ошибка модели по восстанавливаемому параметру;  $p$  – это максимальная степень полинома. Конечный вид (37) зависит от нагреваемого материала, например, для углеродистых сталей такое регрессионное уравнение, описывающее изменение теплоемкости от температуры, будет имеет вид [78]:

$$c(T_{x,y}^t) = c_0 + \sum_{i=1}^p a_i \left( \frac{T_{x,y}^t}{1000} \right)^i + a_2 e^{-a_3(T_{x,y}^t - T_0)}. \quad (38)$$

Здесь  $c_0$  – начальная теплоемкость материала;  $T_0$  – начальная температура материала;  $a_i$ ,  $a_2$  – это регрессионные коэффициенты. Как правило, начальные условия и регрессионные коэффициенты, а также конечный вид уравнения (37) подбираются индивидуально под конкретный вид материала, определенного в некоторой группе схожих материалов. Представленный выше пример (38) определен для группы углеродистых сталей, но коэффициенты  $a_i$ ,  $a_2$  и начальные условия  $c_0$ ,  $T_0$  подбираются индивидуально под конкретную «марку» стали.

Такой подход делает модель чрезмерно фиксированной на конкретном материале твердого тела. Для того, чтобы обеспечить модели большую универсальность, прибегают к построению внешних моделей “явной” адаптации для некоторых групп материалов, коэффициенты которых обобщены. При этом группы материалов должны обладать схожей теплофизической характеристикой. В таком случае говорят о групповой “явной” адаптации, которая имеет обобщенный вид:

$$f_M(T_{x,y}^t) = \begin{cases} f_{M_1}(T_{x,y}^t) = \beta_0 + \left(\sum_{i=1}^p \beta_i \cdot T^i\right) + \varepsilon_{f_{M_1}}, \\ \dots \\ f_{M_k}(T_{x,y}^t) = \beta_0 + \left(\sum_{i=1}^p \beta_i \cdot T^i\right) + \varepsilon_{f_{M_k}}. \end{cases} \quad (39)$$

где  $M$  – некоторый “усредненный” абстрактный материал твердого тела;  $[M_1, M_2, \dots, M_k]$  – группа схожих материалов;  $k$  – количество материалов в группе. В результате получается некоторая решающая композиция размерностью  $k$ , для которой выход может определяться одним единственным агрегатором – арифметическое среднее (40). Из-за того, что неизвестна истинная форма зависимостей  $f_M(T)$ , то применить более сложные агрегирующие функции, например аргумент максимизации ( $\text{argmax}$ ), не представляется возможным.

$$f_M(T_{x,y}^t) = \sum_{i=1}^k \frac{f_{M_i}(T_{x,y}^t)}{k} \quad (40)$$

Чем крупнее группа, тем более универсальной получится модель. Однако существует две проблемы, которые связаны с укрупнением:

- 1) рост алгоритмической сложности модели, в которой используются модели адаптации;
- 2) рост ошибки усреднения.

Рассмотрим первую проблему на примере конечно-разностного решения. Известно, что его асимптотическая сложность ограничена сверху  $O(N \cdot (H \cdot W))$ , где  $H$  – количество шагов вдоль  $Ox$  по пространственной сети,  $W$  – вдоль  $Oy$  по пространственной сети,  $N$  – количество шагов по временной сети. Пусть имеет место классический случай равномерных сетей ( $H=W=P$ ), тогда асимптотический класс сложности конечно-разностной модели полиномиальный  $O(N \cdot P^2)$ , что подтверждается теорией разностных схем [79-80]. Если модели групповой адаптации – это некоторая решающая композиция, то асимптотический класс сложности получения решения известен –  $O(k)$ .

Однако, из-за того, что рассчитывать теплофизические параметры придется в каждой точке  $T_{x,y}^t$ , а их по определению  $N \cdot P^2$  при равномерных пространственных сетях, то общий класс асимптотической сложности конечно-разностного решения с групповой адаптацией будет иметь вид  $O(N \cdot P^{2+2 \cdot k})$ . Если же применить некоторую оптимизацию и обращаться к моделям групповой адаптации один раз в каждом  $T_{x,y}^t$  за  $N$ -й временной слой, то функция сложности будет иметь вид  $O(N \cdot P^{2+k})$ .

Вторая проблема групповой адаптации как эффективного класса методов решения одноименной проблемы в “явном” виде заключается в росте групповой ошибки. Арифметическое среднее в качестве выхода модели групповой адаптации позволяет предположить, что ошибки отдельных моделей будут складываться. Если предположить, что в каждой точке пространственной сети есть некоторая эталонная температура  $\Theta_{x,y}^t$ , и расчетная температура  $T_{x,y}^t$ , то есть  $H \cdot W$  ошибок аппроксимации:

$$\varepsilon_{H \cdot W}^t = \sum_{y=1}^H \sum_{x=1}^W (\Theta_{x,y}^t - T_{x,y}^t [H, W, N, f_M(T_{x,y}^{t-1})]). \quad (41)$$

Согласно теории разностных схем аппроксимация в точке  $t$  зависит от размерности временной и пространственных сетей. При наличии внешней модели групповой “явной” адаптации температура в точке становится зависимой еще и от нее. При этом таких точек ( $H \cdot W$ ) есть  $N$  наборов, ввиду чего ошибка будет накапливаться аддитивно от одного временного слоя к другому:

$$\varepsilon_{\text{МКР}} = \sum_{t=1}^N \varepsilon_{H \cdot W}^t; \varepsilon_{\text{МКР}} \in O(h^2) + O(\tau) + O(M_k). \quad (42)$$

В таком случае согласно классической теории разностных схем ошибка тем меньше, чем меньше шаг по пространству ( $h$ ) и по времени ( $\tau$ ) и больше количество шагов по сетям ( $H$ ,  $W$  и  $N$ ) соответственно. Но согласно (42) ошибка еще и тем меньше, чем меньше количество моделей в групповой адаптации ( $k$ ). Возникающее противоречие значительно сказывается на применимости моделей нестационарной теплопроводности для решения

прикладных научно-технических задач. Из него можно заметить, что все попытки сделать модель более гибкой путем “явной” адаптации будут приводить к уменьшению её точности. Эта проблема не была бы такой критичной, если бы погрешность в области  $O(M_k)$  стремилась к нулю, что можно было бы гарантировать при наличии истинных формул расчета теплофизических параметров твердого тела при нагреве в высоких температурах. В таком случае можно было бы говорить об аналитической оценке величины  $O(M_k)$  и коррекции точности отдельных моделей системы (39). Но на сегодняшний день существуют лишь приближенные формулы, определенные для “хорошо” изученных материалов.

Функции изменения теплофизических параметров твердого тела от температуры можно получить и самостоятельно, используя справочную научно-техническую литературу. Однако в таком случае возникает инженерно-практическая нетривиальная проблема, проиллюстрировать которую, ввиду всего вышеизложенного, будет проще на конкретном примере.

### **2.2.1 Практический аспект проблемы “явной” групповой адаптации**

Рассмотрим нагрев твердых тел из конкретного материала – стали. Упомянутой выше научно-технической литературой для стали являются «марочки» [81,82], где среди прочего указаны дискретные замеры плотности ( $\rho$ ), теплопроводности ( $\lambda$ ) и теплоемкости ( $c$ ) тех или иных «марок» сталей. Также данные теплофизические величины представлены в различных справочниках физических величин по распространенным материалам [83].

Рассматривая нагрев твердых тел из стали в среде высоких температур, групповую адаптацию можно провести по трем основным группам сталей:

- 1) нелегированные стали, низко- и среднелегированные стали перлитного класса;
- 2) нержавеющие стали, жаростойкие и жаропрочные стали мартенситного, мартенсито-ферритного и ферритного классов;

3) нержавеющие стали, жаростойкие и жаропрочные стали аустенитного класса.

В рамках каждой из групп можно провести групповую “явную” адаптацию по подгруппам. Крупность подгруппы зависит от конечного приложения модели нестационарной теплопроводности, где будет использоваться данный механизм адаптации.

Однако, обратившись, например, к третьей группе сталей, в марочниках можно обнаружить следующую ситуацию (рис.6). Групповая адаптация предполагает, что выборки всех элементов группы будут сбалансированы в рамках одного и того же диапазона. Как можно заметить из выдержки (рис.6) это не всегда возможно, опираясь на справочники.

Наименование стали	T, °K	$\gamma, 10^3 \text{ кг/м}^3$	$c_p, \text{ кДж/(кг}\cdot\text{град)}$	$\lambda, \text{ Вт/(м}\cdot\text{град)}$	$\alpha, 10^{-6} \text{ 1/град}$	Применение
X18H9T (1X18H9T, ЭЯ1Т), ГОСТ 5632—61	200	7,906	0,500	13,5	15,9	Оболочки твэлов, сильфоны, конст- рукционные дета- ли активной зоны реакторов при температурах ме- нее 773°K
	300	7,900	0,505	14,5	16,2	
	400	7,895	0,520	16,5	16,6	
	500	—	0,535	17,5	17,0	
	600	—	0,550	18,5	17,3	
	700	—	0,575	20,0	17,6	
X18H9T (1X18H9T, ЭЯ1Т) ГОСТ 5632—61	800	—	0,600	21,5	17,9	Оболочки твэлов, сильфоны, конст- рукционные дета- ли активной зоны реакторов при температурах менее 773°K
	900	—	0,615	23,0	18,2	
	1000	7,860	0,630	25,0	18,5	
	1200	—	0,660	25,8	18,8	
	1400	7,836	0,690	28,0	18,6	

Рис. 6 – Выдержка из справочника физических величин по материалам А.П. Бабичева, Н.А. Бабушкина и А.М. Братковского от 1991 года.

Причем важно отметить, что это не единичный случай конкретного справочника физических величин. В специализированном марочнике сталей под редакцией А.С. Зубченко [81] наблюдается такая же проблема. Это первая проблема, связанная с рассматриваемым практическим аспектом проблемы “явной” адаптации.

Вторую проблему практического аспекта групповой адаптации модели можно проиллюстрировать на примере упомянутого выше марочника стали [81]. В приложении приводятся сводные таблицы физических величин «марок» сталей, включая и теплофизические (рис.7-8).

Марка стали, сплава	Удельная теплоемкость $C$ , Дж/(кг·°C), при температуре, °C										
	20	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
08кп	—	482	498	514	533	555	584	626	695	695	—
08	—	465	477	—	510	—	565	—	—	—	—
10кп	—	466	479	—	512	—	567	—	—	—	—
10	—	465	477	—	510	—	565	—	—	—	—
15кп	—	465	486	515	532	565	586	620	691	—	—
15	—	469	481	—	523	569	—	—	—	—	—
20кп	—	486	498	514	533	555	584	636	703	695	—
20	—	469	481	—	536	569	—	—	—	—	—

Рис. 7 – Удельная теплоемкость отдельных «марок» сталей (из приложения к марочнику стали [81])

Марка стали, сплава	Теплопроводность, $\lambda$ , Вт / (м ·°C), при температуре, °C										
	20	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Ст3сп	—	55	54	50	45	39	34	30	—	—	—
08кп	63	60	56	51	47	41	37	34	30	27	—
08	—	81	69	—	51	45	—	—	—	—	—
10кп	—	58	54	49	45	40	36	32	29	27	—
10	—	57	53	45	38	—	—	—	—	—	—
15кп	—	53	53	49	46	43	39	36	32	30	—
15	—	56	53	—	45	—	—	—	—	—	—
20кп	—	51	49	44	43	39	36	32	26	26	—
20	—	51	49	46	42	—	—	—	—	—	—

Рис. 8 – Теплопроводность отдельных «марок» сталей (из приложения к марочнику стали [81])

Дискретных замеров теплофизических величин всего 11, из которых определены лишь некоторые. Причем теплофизические параметры изменяются каждые 100 °C не на одинаковую величину, следовательно закон их изменения имеет определенную нелинейность. Получить нелинейный закон изменения с высокой точностью на таком количестве точек – это весьма нетривиальная задача.

Третья проблема практического применения метода “явной” групповой адаптации заключается в том, что данные в справочниках и марочниках напрямую связаны с производствами, где они были получены. Такая справочная литература позволяет получить конечный вид зависимости (37), близкий к истинному виду. Однако значения коэффициентов регрессионных моделей будут различаться от одного производства к другому. Это объясняется различными допусками по тем или иным подвидам материала, производимого на том или ином производстве.

Вышеизложенные проблемы приводят к тому, что получаемые внешние модели “явной” адаптации будут приближительными. Причем величина приближения не может быть определена количественно, так как нет универсальных теоретических формул для расчетов теплофизических

параметров твердых тел. Кроме того, величина приближения не может быть определена из результатов анализа точности модели нестационарной теплопроводности. Проиллюстрируем это на примере.

Пусть имеются две конечно-разностные эквивалентные друг другу сеточные модели, описывающие нагрев твердого тела в среде высоких температур. Для минимизации влияния сеточного разбиения на точность получаемой модели, рассмотрим нагрев прямоугольных твердых тел в двумерной постановке с ортогональными равномерными пространственными сетями.

Воспользуемся двумя марочниками сталей [81] и [82]. На основании этих двух марочников, выполним групповую адаптацию “явными” внешними регрессионными моделями для небольшой группы «марок» сталей (08кп, 10кп, 15кп, 20кп, 45кп, у8, у12), имеющих наиболее сбалансированную выборку и наименьшее количество пропущенных значений в дискретных замерах теплофизических величин. В результате получим две конечно-разностных модели нестационарной теплопроводности с групповой адаптацией.

Основная цель эксперимента – сравнить ошибку этих моделей при помощи некоторой метрики, например абсолютной средней ошибки (MAE) (43) на данных о некотором реальном тепловом процессе.

$$\text{MAE} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h |e_i|, \quad (43)$$

где  $h$  – это горизонт прогнозирования,  $e_i$  – ошибка прогноза на  $i$ -м шаге. В качестве такого теплового процесса рассматривался нагрев твердых тел в многозонной печи с пламенным режимом работы. В качестве источника данных о процессе выступила автоматизированная система управления печью нагрева сортопрокатного цеха АО Оскольский электрометаллургический комбинат (ОЭМК) им. А.А. Угарова, расположенного в Белгородской области. Всего были получены данные о 80 заготовках. В таблице 1 приведены результаты численного сравнительного эксперимента.

Таблица 1 – Результаты численного эксперимента

Модель	Абсолютная средняя ошибка, °С
Модель с групповой адаптацией по марочнику [81]	18,1
Модель с групповой адаптацией по марочнику [82]	22,2
Модель адаптированная по [81], апробированная на твердых телах других «марок» сталей	52,8
Модель адаптированная по [82], апробированная на твердых телах других «марок» сталей	31,6

По результатам численного эксперимента можно заметить, что допуски конкретного производства, которое было рассмотрено в качестве частного случая практического применения модели нестационарной теплопроводности, сильно влияют на её точность. Поскольку две модели были полностью подобны друг другу, отличаясь только внешними моделями групповой “явной” адаптации, можно справедливо предположить, что всё дело именно в их ошибке. При этом представленный выше результат был закреплён множественными экспериментами, для которых использовался третий справочный материал [84].

Таким образом потребуется множество натуральных экспериментов, чтобы определить, насколько модели по отдельным марочникам и справочникам расходятся с данными конкретных производств. Это по ряду причин нецелесообразно, в том числе по экономическим причинам, а иногда и просто невозможно. Вышеизложенный численный эксперимент, несомненно, представляет собой некоторый частный случай. Однако, анализируя его предпосылки, можно сделать вывод о том, что это системная проблема. Она справедлива не только для сталей, но и для чугунов и других материалов, нагреваемых в среде высоких температур. В этом можно убедиться, проанализировав справочники различных материалов разных годов издания, например [85-88].

Однако, несмотря на всё вышеизложенное, это не делает модели на основе нестационарной теплопроводности совершенно практически неприменимыми. Проблема “явной” адаптации внешними моделями, включая ситуации групповой адаптации, требует принятия определенных допущений,

что в частных случаях лишь ограничивает область применимости таких моделей.

Тем не менее, проблема “явной” адаптации не исчерпывается восстановлением функций изменения теплофизических параметров нагреваемых твердых тел от температуры. Необходимо учитывать, что коэффициент теплообмена на границе твердого тела также необходимо рассматривать как некоторую функцию. При этом конечный вид этой функции зависит не только от температуры на границе, но и от температуры среды, скорости движения теплоносителя и других параметров нагрева. Все эти параметры можно охарактеризовать как условия теплообмена.

Таким образом, задача “явной” адаптации становится крайне нетривиальной, когда к восстановлению температурной динамики теплофизических величин добавляется необходимость восстановить закон изменения коэффициента теплообмена. Рассмотрим такой подвид адаптации детальней.

### **2.2.2 Практический аспект проблемы адаптации к условиям теплообмена**

Коэффициент теплообмена в уравнении Ньютона-Рихмана (первое слагаемое краевых условий III-го рода) объясняет некоторые кумулятивные характеристики теплообмена со стороны конвективного теплоносителя (газа или воздуха):

$$\kappa = \alpha \cdot S / c, \quad (44)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,  $S$  – единица площади,  $c$  – теплоемкость тела. Кумулятивный эффект проявляется во влиянии внешних параметров конвективного теплообмена на  $\alpha$ , который зависит от: вида теплоносителя, режима течения теплоносителя и вида конвекции; геометрии тела и вида обтекания поверхности.

На сегодняшний день решений проблемы адаптации по коэффициенту теплообмена несколько [89, 90], и все они базируются на решении некоторой

обратной задачи теплопроводности (ОЗТ). Однако существует подход без применения ОЗТ [91,92], который заключается в применении критерия Нуссельта для расчета конвективной составляющей теплообмена:

$$\kappa(T) = \frac{\text{Nu} \cdot \lambda^H(T)}{l}. \quad (45)$$

Здесь  $l$  – определяющий размер или высота вертикальной поверхности теплообмена, м;  $\lambda^H$  – это коэффициент теплопроводности конвективного теплоносителя нагревающей среды, Вт/(м·К). Для расчета уравнения (45) необходимо вычислить число Нуссельта (Nu). Обычно данное число находят из некоторого критериального уравнения [93] следующего вида:

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}, \text{Gr}, \dots), \quad (46)$$

где Re – критерий Рейнольдса, Pr – критерий Прандтля, Gr – критерий Грасгофа [93]. Конечный вид уравнения (46) зависит от вида термодинамического изопротесса и характера движения теплоносителя. Та самая крайняя нетривиальность проблемы адаптации к условиям теплообмена заключается именно в подборе конечного вида этого критериального уравнения.

Критические числа в составе уравнения (46) имеют известные формулы расчета. Так для расчета критического числа Прандтля нужно взять отношение кинематической вязкости теплоносителя ( $\nu_B$ ) к коэффициенту его температуропроводности ( $a_B$ ). Представив температуропроводность как отношение произведения плотности и теплоемкости к теплопроводности, получаем следующее уравнение:

$$\text{Pr} = \frac{\nu_B}{a_B} = \frac{\nu_B \cdot \rho_B \cdot c_B}{\lambda_B}, \quad (47)$$

где  $\rho_B$  и  $c_B$  – это коэффициенты плотности и теплоемкости теплоносителя;  $\lambda_B$  – это коэффициент его теплопроводности.

Расчет критического числа Грасгофа предполагает следующую зависимость:

$$\text{Gr} = \frac{g \cdot l^3}{\nu_B^2} \cdot \beta \cdot \Delta T. \quad (48)$$

Здесь  $g$  – ускорение свободного падения ( $9,8 \text{ м/с}^2$ );  $\Delta T$  – это модуль разности между температурой поверхности нагреваемого твердого тела и температурой теплоносителя, К;  $\beta(T)$  – это коэффициент объемного расширения теплоносителя, зависящий в данном случае от её средней температуры ( $T_{cp}$ ) в момент времени  $t$ :

$$\beta(T) = \frac{1}{T_{cp}(t)}. \quad (49)$$

Модель (46)-(49) представляет собой динамический расчет коэффициента теплообмена, опираясь на расчетные параметры. При этом высокотемпературный нагрев, для которого характерно предложенное решение, вынуждает рассматривать функцию определения критического числа Нуссельта как функцию от температуры  $\text{Nu}(T)$ . Данный факт приведет к тому, что и остальные критические числа должны будут иметь такую динамику ( $\text{Re}(T)$ ,  $\text{Gr}(T)$ ,  $\text{Pr}(T)$ ). В таком случае адаптация моделью (46)-(49) возможна только при условии известности правых частей тетрады:

$$\nu_B(T) = f_1(T), \rho_B(T) = f_2(T), c_B(T) = f_3(T), \lambda_B(T) = f_4(T). \quad (50)$$

В случае, когда известен вид критериального уравнения (46), задача адаптации к условиям теплообмена становится тривиальной. Параметры тетрады (50) могут быть восстановлены при известном качественном составе теплоносителя. Однако, как было сказано ранее, для высокотемпературного нагрева определение конечного вида критериального уравнения (46) является нетривиальной задачей, которая может потребовать в каждом отдельном случае дополнительных исследований теплового процесса более простыми моделями.

### 2.3 Альтернативный взгляд на проблему адаптации модели нестационарной теплопроводности.

В рамках математического моделирования нагрева твердых тел существует отдельный класс задач, известных как обратные задачи теплопроводности (ОЗТ). При решении ОЗТ предполагается, что результирующая температура нагрева твердого тела на его границах или внутри сечения известна и можно оценить невязку. Оценка невязки позволяет корректировать отдельные теплофизические параметры, решая задачу их восстановления на основе решения прямой задачи. Такой подход получил название *коэффициентные* обратные задачи теплопроводности и хорошо представлен в современных исследованиях [29, 30, 94, 95].

В своей сути *коэффициентные* задачи опираются на несколько допущений:

- 1) некоторые теплофизические параметры или условия нагрева известны;
- 2) нелинейные условия приведены к линейным для упрощения расчетов;
- 3) часть задач принимается некорректно поставленными и решается стохастическими методами.

Чаще всего в современных исследованиях можно встретить работы, посвященные решению подобных задач с целью восстановить значения коэффициента теплообмена ( $\kappa$ ) в разные моменты времени [89,90]. Однако подобные задачи можно встретить и при адаптации к теплофизическим параметрам твердого тела ( $\lambda, \rho, c$ )

В частности, в работе [30] изложен подход приведения обратной задачи к параметрической оптимизационной задаче в ситуации, когда известны два из трех теплофизических параметров (неизвестна только теплопроводность). В ней обратная задача валидируется прямой моделью нестационарной теплопроводности. Это возможно только при условии, что имеются устойчивые начальные значения теплофизических параметров твердого тела.

Такая задача тем сложнее, чем меньше теплофизических параметров уже адаптировано. Ситуация, когда неизвестна температурная динамика ни для одного из теплофизических параметров ( $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c$ ), а также неизвестна температурная динамика коэффициента теплообмена ( $k$ ) является наиболее сложной [29, 37].

Такая задача представляла бы собой четырехмерную оптимизацию, для которой не решены две существенные проблемы, неформально звучащие как:

- 1) какими выбирать начальные условия для  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c$  и  $k$ ?
- 2) сколько точек нужно восстановить, решая ОЗТ, чтобы затем, аппроксимировав их, получить некоторый закон изменения теплофизической характеристики близкий к истинному?

На сегодняшний день не существует точного ответа на эти вопросы. На практике начальными условиями теплофизических параметров нагреваемого твердого тела, как правило, берут табличные значения – те же значения, на которых строятся модели “явной” адаптации – и, решая коэффициентную ОЗТ, пытаются либо укрупнить выборку, восстановив значения на промежуточных температурах, не представленных в справочнике [35, 36], либо решают смежные вариационные задачи, корректируя параметры от некоторых начальных в фиксированных точках температуры твердого тела [30, 33]. Ответ на второй вопрос, как правило, ограничен числом точек натурального эксперимента, по которым может быть оценена явная невязка.

Как бы там ни было, представленный выше подход – это лишь альтернативный способ получения внешней модели “явной” адаптации. Данный способ устраняет часть проблем, представленных в п.2.2.1 и п.2.2.2, но никак не устраняет противоречия, возникающие при групповой адаптации такими внешними моделями. И не позволяет моделям нестационарной теплопроводности становится более универсальными.

Анализируя представленную в данной главе исследования проблемы “явной” адаптации, можно прийти к выводу, что она не имеет унифицированного решения. Поэтому было принято решение рассмотреть

проблемы универсальности моделей нестационарной теплопроводности с иной стороны.

В том числе и из-за проблем с адаптацией моделей нестационарной теплопроводности, в последнее время задача моделирования нагрева заменяется на регрессионные задачи. Суть решения таких задач заключается в получении зависимости температуры уже нагретого твердого тела от параметров, описывающих историю его нагрева.

Формально такого рода подходы ставят целью аппроксимацию, но не теплофизических характеристик нагреваемого тела, а самого уравнения нестационарной теплопроводности, опираясь на некоторую известную статистику.

Подобные задачи, равно как и задачи моделирования нестационарной теплопроводности, решаются в различных областях науки и техники, связанных с передачей тепла и тепловым воздействием или обработкой твердых тел [38, 40, 96-98].

Проанализировав решения такого рода задач, было замечено, что как правило статистические модели не получают никакой информации о структуре материала, нагрев которого лег в основу используемой статистики. Данный факт наталкивает на мысль, что внутри статистических сведений об истории нагрева твердого тела могут находиться скрытые зависимости между отдельными параметрами, позволяющие модели иметь достаточно высокую точность без процедур “явной” адаптации. Это же подтверждается и другими исследователями, применявшими подобный подход в других областях для нагрева твердых тел не из стали для низких [96] и высоких температур [58].

Данное предположение легло в основу предложенных моделей при решении конкретной научно-практической задачи, связанной с попытками получить зависимость температуры нагретой стальной заготовки от истории её нагрева в промышленной многозонной печи [43, 44, 45, 47]. Хотя данные решения и являются частными случаями нестационарного нагрева, но они весьма показательны. В них приводятся математические модели

аппроксимации уравнения нестационарной теплопроводности при помощи композиционных подходов (ансамблей математических моделей): усиливающего объединения, известного как “Bagging-композиция” (рис.9а) и усиливающего пересечения, известного как “Boosting-композиция” (рис.9б).

Решая инженерно-практическую задачу построения зависимости температуры нагретой заготовки от истории её нагрева в печи, была предложена сложная по структуре комбинированная модель. Детально она изложена в работах [43, 44]. Рассмотрим её вкратце.

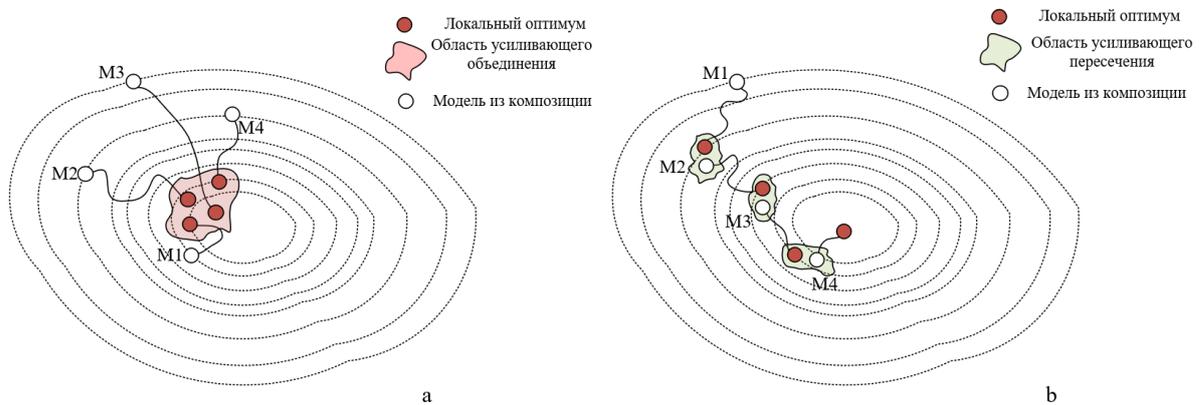


Рис. 9 – Композиционные подходы усиливающего объединения (а) и усиливающего пересечения (б)

Данная модель базируется на методе градиентного бустинга, который был применен к математической структуре вида “случайный лес”, состоящей из классификационно-регрессионных деревьев (КРД) вида DART [99]. Решение аппроксимации нестационарной теплопроводности сводится до оптимизационной задачи настройки параметров древовидной модели. Применимо к методу градиентного бустинга, данный процесс оптимизации опирается на целевую функцию вида:

$$L^{(t+1)} = \sum_{i=1}^n f_L(y_i^{(t+1)}, Y_i^{(t)}) + f_D^{(t+1)}(X_i) + \Omega(f_D^{(t+1)}), \quad (51)$$

где  $L^{(t+1)}$  – функция оптимизации градиентного бустинга  $t+1$ -го «леса»;  $f_L(\bullet)$  – функция потерь;  $y_i^{(t+1)}$  – значение  $i$ -го элемента из числа эталонных наблюдений;  $Y_i^{(t)}$  – это сумма предсказаний первых  $t$  «лесов» для  $i$ -го эталона;

$X_i$  – это кортеж из значений независимых переменных для предсказания  $i$ -го эталона;  $f_D^{(t)}(\bullet)$  – это прогноз  $t+1$ -го «леса»;  $\Omega(f_D^{(t)})$  – функция регуляризации:

$$\Omega(f_D^{(t)}) = \gamma_1 K + 0.5 \cdot \gamma_2 \|w\|^2, \quad (52)$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – это коэффициенты регуляризации;  $K$  – количество деревьев в рамках «леса»,  $w$  – значения весов ветвей деревьев. Поиск локального оптимума моделей сводится к минимизации  $L^{(t)}$ . Для более формального описания данного процесса необходимо рассмотреть разложение:

$$L^{(t+1)} = \sum_{i=1}^n f_L(\cdot) + g_i f_D^{(t+1)}(x_i) + \frac{1}{2} h_i [f_i^{(t+1)}(x_i)]^2 + \Omega(f_D^{(t+1)}) + O(h). \quad (53)$$

В данном случае  $g_i$  и  $h_i$  являются частными производными первого и второго порядка по функции ошибки:

$$g_i = \frac{\partial l(y_i^{(t+1)}, \hat{y}_i^{(t)})}{\partial \hat{y}_i^{(t)}}, h_i = \frac{\partial^2 l(y_i^{(t+1)}, \hat{y}_i^{(t)})}{\partial^2 \hat{y}_i^{(t)}}, \hat{y}_i^{(t)} \in Y_i^{(t)}. \quad (54)$$

Таким образом для каждого отдельно взятого дерева в модели минимум ищется как отношение представленных в уравнениях (54) частных производных [95, 96]:

$$\min(L^{(t)}(f_D(X_i))) = \frac{-g_i}{h_i}. \quad (55)$$

Ошибка между эталонными наблюдениями в статистике и фактическими расчетами модели (51)-(55) ищется до тех пор, пока не будет достигнут некоторый критерий остановки, так как целевая функция (51) является многоэкстремальной. Анализируя не только представленную выше модель для частного случая, но и другие частные композиционные модели со сложной структурой, можно заметить, что все они обладают достаточно низкой погрешностью (табл.2).

Статистические сведения, содержащие сведения о нестационарном нагреве для экспериментов (табл.2), были выгружены из автоматизированной систему управления технологическим процессом (АСУ ТП) действующей промышленной печи АО «ОЭМК» им. А.А. Угарова и содержали 20969

заготовок (тестовая статистика 2645 заготовок, валидационная – 1549 заготовок, остальные сведения были использованы для построения моделей).

Таблица 2 – Погрешность исследуемых композиционных моделей

Модель	Ошибка, °С		Критерий R <sup>2</sup>	
	Тестовая статистика	Валидационная статистика	Тестовая статистика	Валидационная статистика
Композиция регрессионных уравнений	24	30	0,589	0,431
Композиция «Случайный лес»	21	29	0,632	0,545
Композиция 1-КРД	20	25	0,891	0,857
Композиция «Случайный лес»	15	23	0,897	0,856
DART-модель 1 КРД	15	19	0,902	0,875
DART-случайный лес	9	11	0,922	0,901

Точность таких моделей находится на уровне (или выше) точности конечно-разностного решения нестационарной теплопроводности, адаптированного “явными” внешними моделями. При этом данные модели не получали никаких сведений о материале нагреваемых тел, лишь сведения об истории нагрева, которые содержали в себе информацию о времени нагрева, температурах теплоносителя, линейных размерах и массе тела, а также о вспомогательных параметрах, таких как давление и температура рекуперативного воздуха в печи.

Назовем эффект, при котором математическая модель восстанавливает законы изменения теплофизических параметров и условий теплообмена из технологических данных, неявной адаптацией. Исследования показывают, что таким эффектом обладают в полной мере только математические модели со сложной внутренней структурой, которые делают эти же модели совершенно неинтерпретируемыми.

Таким образом этот эффект, возникающий в статистических моделях сложной структуры, может быть рассмотрен как фундаментальная альтернатива решению проблемы адаптации “явным” способом при помощи внешних моделей. Предполагалось, в частности, что эффект неявной адаптации можно перенести на модель нестационарной теплопроводности.

Это позволит сохранить интерпретируемую структуру модели и одновременно адаптировать ее без применения сторонних моделей.

В данном случае стоит говорить не о строгом решении проблемы адаптации, а скорее об её “избегании”, решая её неявно. Такое решение позволит избежать противоречия групповой адаптации, которое ограничивало как алгоритмическую сложность модели нестационарной теплопроводности, так и сказывалось на её точности.

#### **2.4 Выводы по главе**

Основная проблема применимости моделей нестационарной теплопроводности заключается в нетривиальности решения задачи их адаптации к теплофизическим параметрам нагреваемого твердого тела и условиям теплообмена на его границе в “явном” виде. Такого рода адаптация выполняется при помощи внешних моделей и негативно сказывается на алгоритмической сложности и точности модели.

Рассматривая проблему групповой адаптации “явными” внешними моделями к теплофизическим параметрам нагреваемого твердого тела для конечно-разностных решений, можно заметить, что расчет изменения того или иного параметра от температуры в каждом узле пространственной сети оказывается алгоритмически неэффективным. Такие модели будут иметь класс сложности, показательно зависящий от размера выбранной группы для адаптации –  $O(N \cdot P^{2+k})$ .

Один из наиболее популярных способов решить данную проблему заключается в принятии допущения о том, что теплофизические параметры во всех узлах пространственной сети модели численного решения постоянны на конкретном временном шаге. Попытка описать группу одной усредненной моделью решит проблему алгоритмической сложности, но значительно повысит погрешность модели. В том числе потому, что не имеется прямых механизмов вычисления невязки между выходом модели адаптации и фактическим значением теплофизического коэффициента.

Когда речь заходит про моделирование нелинейных граничных условий, например условий III-го рода, то возникает еще одна проблема, связанная с необходимостью адаптации модели к условиям теплообмена на границе твердого тела. В частности, эта задача сводится до определения локальных коэффициентов теплообмена ( $\kappa$ ).

Даже если рассматривать локальные коэффициенты постоянными по заданным участкам границ твердого тела, эта задача по-прежнему остается крайне нетривиальной, так как требует детальной идентификации вида процесса. В п.2.2.2 данной главы рассматривалось решение, основанное на применении критического числа Нуссельта для определения коэффициента теплообмена. Анализируя данный подход детально, можно заметить, что нетривиальность, упомянутая ранее, создает необходимость определения вида критериального уравнения, по которому можно оценить число Нуссельта.

Для решения этой задачи придется выполнить едва ли не отдельное исследование, в состав которого войдет определение динамики изменения теплофизических параметров границы твердого тела, что возвращает к проблеме адаптации, описанной ранее. Кроме того, не для всех приложений модели нестационарной теплопроводности можно гарантировать, что определение критериального уравнения числа Нуссельта вообще возможно.

Альтернативным взглядом на решение проблемы “явной” адаптации модели нестационарной теплопроводности является её “избегание” или решение в неявном виде. Замена численного решения уравнения нестационарной теплопроводности на его аппроксимацию на основе статистических данных о процессе нестационарного нагрева показала, что такая адаптация возможна. Статистические модели, не получая никакой информации о материале нагреваемых твердых тел, способны с высокой точностью устанавливать зависимость между температурой уже нагретого твердого тела и теми данными, которые описывают историю такого нагрева.

Предполагается, что чем более полно статистические данные описывают процесс нагрева, не содержа при этом напрямую никакой информации о

материале нагреваемых твердых тел, тем более вероятно, что эту информацию можно получить неявным образом из скрытых зависимостей. Современные исследователи, строящие такие модели для частных случаев нестационарного нагрева, демонстрируют относительно высокую точность таких моделей [38,40, 58, 96-98]. Данный факт позволяет предположить, что подобный эффект неявной адаптации имеет место быть, что в свою очередь позволяет рассматривать возможность переноса этого эффекта на модель численного решения нестационарной теплопроводности.

Несмотря на относительно высокую точность таких статистических моделей для того, чтобы извлечь неявно сведения об изменении теплофизических параметров и условий нагрева, им требуется сложная внутренняя математическая структура. Сложная структура делает такие модели неинтерпретируемыми.

Однако основная проблема таких статистических моделей, которая мешает рассматривать их как полноценный универсальный аналог решения задачи нестационарной теплопроводности, заключается в следующем. Несмотря на обобщенность инструментария их получения, структура таких моделей жестко закрепляется не только за частным случаем нестационарного нагрева, но и за конкретным тепловым процессом. Сложная структура статистических моделей, которые не редко превращаются в модели так называемого “машинного обучения”, не имеет теоретически обоснованной базы. Для каждой отдельной задачи и каждого отдельного случая её придется подбирать индивидуально.

Предполагается, что перенос эффекта неявной адаптации на модель численного решения нестационарной теплопроводности позволит модифицировать саму модель и получить численный метод, который будет в достаточной степени универсальным, более интерпретируемым и охватывать больший класс частных случаев нестационарного нагрева.

Рассмотрим предлагаемые модель и численный метод неявной адаптации детальней.

### Глава 3 Конечно-разностная модель нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией

Материал, изложенный в данной главе, составляет научную новизну диссертационной работы.

#### 3.1 Предлагаемая модель на базе замены теплофизических коэффициентов на свободные параметры

Рассмотрим модель нестационарной теплопроводности

$$\begin{cases} \rho \cdot c \frac{T_{x_k, y_q = const}^{n+\frac{1}{2}} - T_{x_k, y_q = const}^n}{\tau} = \lambda \cdot \frac{T_{x_k+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot T_{x_k}^{n+\frac{1}{2}} + T_{x_k-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}, \\ \rho \cdot c \frac{T_{x_k = const, y_q}^{n+1} - T_{x_k = const, y_q}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \lambda \cdot \frac{T_{y_q+1}^{n+1} - 2 \cdot T_{y_q}^{n+1} + T_{y_q-1}^{n+1}}{h_y^2}. \end{cases} \quad (56)$$

Предлагается выполнить в модели (56) замены теплофизических параметров на безразмерные величины:

$$\varphi^{(n)} = \lambda ; \omega^{(n)} = \rho \cdot c, \quad (57)$$

где  $n$  – это шаг по временной сетке с размерностью  $N$ , которая имеет вид (14). В отличие от известных моделей, в предлагаемой коэффициенты  $\varphi$  и  $\omega$  покрывают всю временную сетку, что при наличии двух пространственных координат позволяет рассматривать их как векторы следующего вида:

$$\varphi_l = \{ \varphi_l^{(n)} \mid n = \overline{0, N} \}; \quad \omega_l = \{ \omega_l^{(n)} \mid n = \overline{0, N} \}, \quad (58)$$

где  $l$  – это нормаль к поверхности двумерного сечения, принимающая значение  $x$  или  $y$  в зависимости от рассматриваемого вектора движения температурного поля внутри заготовки. Тогда соответствующие замены можно сделать и в конечно-разностной модели (56):

$$\begin{cases} \omega_x^{(n)} \cdot \frac{T_{x_k, y_q = const}^{n+\frac{1}{2}} - T_{x_k, y_q = const}^n}{\tau} = \varphi_x^{(n)} \cdot \frac{T_{x_k+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot T_{x_k}^{n+\frac{1}{2}} + T_{x_k-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}, \\ \omega_y^{(n)} \cdot \frac{T_{x_k = const, y_q}^{n+1} - T_{x_k = const, y_q}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \varphi_y^{(n)} \cdot \frac{T_{y_q+1}^{n+1} - 2 \cdot T_{y_q}^{n+1} + T_{y_q-1}^{n+1}}{h_y^2}. \end{cases} \quad (59)$$

Суть предлагаемого в диссертационном исследовании подхода заключается в замене непрерывных теплофизических коэффициентов нагреваемого твердого тела на безразмерные величины, равномерно распределенные по всему её жизненному циклу. Представленная сеточная модель нестационарной теплопроводности является моделью с дискретным временем жизни, определенным в каждом узле временной сети (14). Иными словами, в работе предлагается выполнить замены параметров ( $\lambda$ ) и ( $\rho \cdot c$ ) таким образом, чтобы получить вектора безразмерных величин (58), коллинеарные временной сети.

Таким образом, можно заменить поиск “явных” внешних моделей на поиск условно оптимальных значений дискретных безразмерных параметров в каждый момент времени, опираясь на решение смежной вариационной задачи и статистические данные, описывающие нестационарный нагрев. Процесс настройки параметров при помощи некоторого механизма их движения в сторону условно оптимальных значений и будем понимать далее как неявную адаптацию.

Для формализации механизма настройки параметров  $\varphi$  и  $\omega$  был предложен численный метод на основе модификации метода стохастического градиентного спуска. Рассмотрим его детальней.

### **3.2 Предложенный численный метод настройки параметров модели**

Согласно системе (59), предложенная модель также расщеплена по координатам пространственных сетей на две подмодели, рассчитывающие температуры в дискретных узлах вдоль  $Ox$  и  $Oy$ . Следовательно, имеется возможность задать параметры  $\varphi$  и  $\omega$  как две пары векторов для каждой отдельной подмодели – (60). Таким образом, в каждой временной точке будет параметр, неформально определенный на целом временном слое ( $n+1$ ) и его половине ( $(n+1/2)$ ):

$$\begin{cases} \omega_x = \{\omega_x^{(n)} | n = \overline{0, N}\} \\ \omega_y = \{\omega_y^{(n)} | n = \overline{0, N}\} \end{cases}, \begin{cases} \varphi_x = \{\varphi_x^{(n)} | n = \overline{0, N}\} \\ \varphi_y = \{\varphi_y^{(n)} | n = \overline{0, N}\} \end{cases}, \quad (60)$$

где  $N$  – максимальное количество узлов во временной сети (14). Рассматривая каждое из уравнений системы (59) как отдельные модели, можно заметить, что они определены с дискретным набором из  $N$  состояний, коллинеарным временной оси (14). Назовем состояния модели расчета вдоль  $Ox$  как  $\xi_x$ , а вдоль  $Oy$  – как  $\xi_y$ . Тогда имеется два набора состояний: для системы  $Ox$  и для системы  $Oy$ , которые в обобщенном виде можно представить следующей схемой (рис.10). Предположим, что имеются ортогональные пространственные сети с равномерным шагом. Это условие является необязательным, но значительно упрощает дальнейшее рассмотрение.

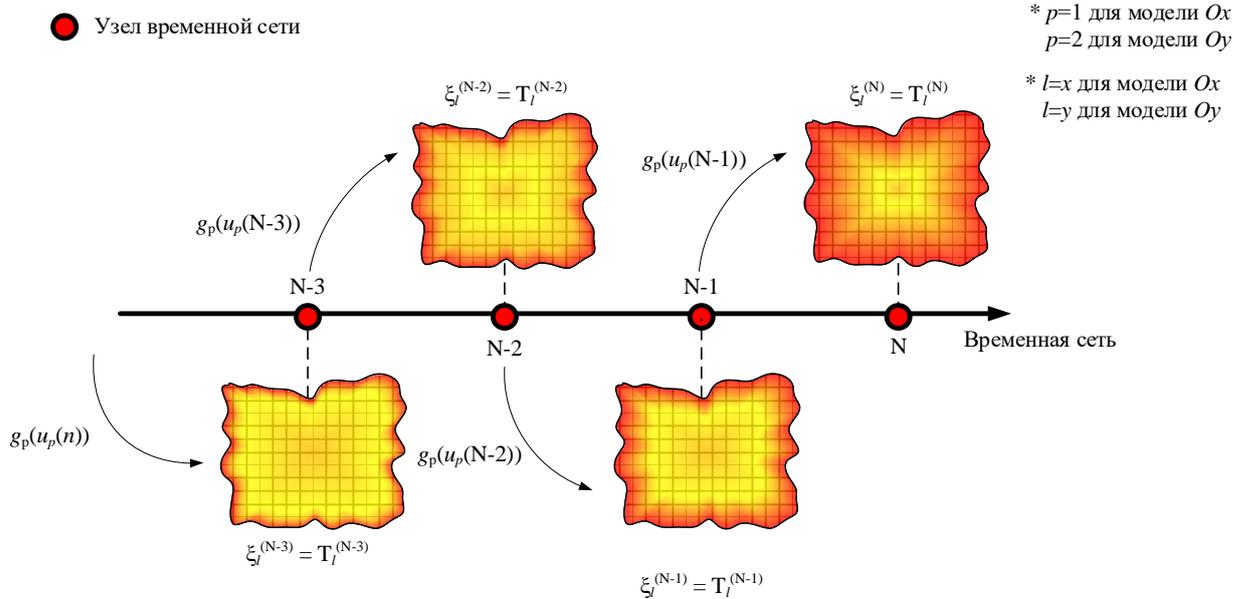


Рис. 10 – Обобщенная схема смены состояний модели

Предположим, что процедура смены состояний модели управляема и существует некоторые управления  $u_1$  и  $u_2$ . В таком случае, функции смены состояний ( $g_p$  на рис.10) должны быть некоторыми рекуррентными отношениями, зависящими от состояния на предыдущем шаге и упомянутого ранее управления:

$$\begin{cases} \xi_{x_k}^{(n)} = g_1(\xi_{x_k}^{(n-1)}, u_1(n)), \\ \xi_{y_q}^{(n)} = g_2(\xi_{y_q}^{(n-1)}, u_2(n)). \end{cases} \quad (61)$$

При этом важно предположить, что рекуррентные отношения (61) определены во всех узлах системы (14) кроме  $n = 0$ . В начальный момент времени, состояние системы известно и определено начальными условиями нестационарной теплопроводности. Проанализировав исходную систему (59), а также вид рекуррентные отношения (61), можно предположить, что упомянутые ранее управления ( $u_1$  и  $u_2$ ) будут представлять собой безразмерные настраиваемые параметры, попарно определенные в узлах временной сети (14):

$$\begin{cases} u_1(n) = \{\varphi_x^{(n)}, \omega_x^{(n)}\}, \\ u_2(n) = \{\varphi_y^{(n)}, \omega_y^{(n)}\}. \end{cases} \quad (62)$$

Зафиксируем некоторый нетривиальный случай, когда математическая модель (59) развивается во времени до  $N$ , и в этот момент ожидается некоторая эталонная температура  $y$ , а эталонные температуры на  $n \neq N$  неизвестны. Пусть известно время нагрева ( $t_{max}$ ) как изменялась температура теплоносителя ( $U_1(t)$  и  $U_2(t)$ ) на временном участке  $0 < t \leq t_{max}$ , а также сведения о линейных размерах твердого тела. Тогда можно обеспечить конечно-разностную модель эффектом неявной адаптации, решив некоторую задачу оптимизации и найдя условно оптимальные управления  $u_1$  и  $u_2$  в каждой точке  $n$ . Оптимальные управления будут доставлять минимум некоторому целевому функционалу, тем самым модель будет адаптироваться, пытаясь обобщить динамику нагрева твердых тел из различного материала.

Перед тем как осуществить вышеизложенное, необходимо определится с конечным видом уравнений состояний  $g_1$  и  $g_2$ . Рассмотрев детальнее модель решения краевой конечно-разностной задачи, можно заметить, что температуры внутри нагреваемого объекта есть некоторая линейная зависимость, берущая начало в точке на границе. Таким образом, граничные температуры определяют в большей мере температуры внутри объекта.

Проанализируем граничные условия и на основе уравнения теплообмена на правой границе восстановим конечный вид уравнения смены состояния системы  $g_1$ , получив функцию вида (63):

$$g_1(T_{x_k}^{(n)}, \{\varphi_x^{(n)}, \omega_x^{(n)}\}) = \frac{2 \cdot \left(\frac{\varphi_x^{(n)}}{\omega_x^{(n)}}\right) \cdot \tau \cdot \varphi_x^{(n)} \cdot \beta_{x_{k-1}} - 2 \cdot \left(\frac{\varphi_x^{(n)}}{\omega_x^{(n)}}\right) \cdot \tau \cdot h_x \cdot q_2 + h_x^2 \cdot \varphi_x^{(n)} \cdot T_{x_k}^{(n)}}{\varphi_x^{(n)} \cdot h_x^2 + 2 \cdot \left(\frac{\varphi_x^{(n)}}{\omega_x^{(n)}}\right) \cdot \tau \cdot \varphi_x^{(n)} \cdot (1 - \alpha_{x_{k-1}})}. \quad (63)$$

Аналогичным образом было получено уравнение состояния  $g_2$ , взяв за основу верхнее граничное условие:

$$g_2(T_{y_q}^{(n)}, \{\varphi_y^{(n)}, \omega_y^{(n)}\}) = \frac{2 \cdot \varphi_y^{(n)} \cdot \tau \cdot \beta_{y_{q-1}} + 2 \cdot \tau \cdot \kappa_2 \cdot h_y \cdot T_2}{2 \cdot \tau \cdot \varphi_y^{(n)} \cdot (1 - \alpha_{y_{q-1}}) + 2 \cdot \tau \cdot \kappa_2 \cdot h_y + \omega_y^{(n)} \cdot h_y^2} + \frac{\omega_y^{(n)} \cdot h_y^2 \cdot T_{y_q}^{(n)} + 2 \cdot \tau \cdot \varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot h_y \cdot ((T_2)^4 - (T_{y_q}^{(n)}))^4}{2 \cdot \tau \cdot \varphi_y^{(n)} \cdot (1 - \alpha_{y_{q-1}}) + 2 \cdot \tau \cdot \kappa_2 \cdot h_y + \omega_y^{(n)} \cdot h_y^2}. \quad (64)$$

Параметры  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $\tau$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , а также  $\sigma$  – это константные параметры по определению сеточной модели. Тогда функции (63) и (64) действительно зависят только от состояний на предыдущем временном слое ( $T_x^{(n)}$ ,  $T_y^{(n)}$ ) и значений пары параметров  $\varphi^{(n)}$  и  $\omega^{(n)}$ , что соотносится со сделанными ранее предположениями (61)-(62)

Введем две целевые функции (по одной для моделей  $Ox$  и  $Oy$ ), которые будут представлять собой квадраты невязок температуры:

$$E_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^V (y_i - g_1(T_{x_k}^{(n)}, u_1(n)_i))^2; \quad E_y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^V (y_i - g_2(T_{y_q}^{(n)}, u_2(n)_i))^2. \quad (65)$$

На основании функций (65) можно поставить задачу, суть которой найти такие траектории управления отдельными моделями  $Ox$  и  $Oy$ , чтобы эти функции минимизировались:

$$\begin{cases} \{u_1(n), u_1(n+1), \dots, u_1(N)\}, & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (y_i - g_1(T_{x_k}^{(n)}, u_1(n)_i))^2 \rightarrow \min, \\ \{u_2(n), u_2(n+1), \dots, u_2(N)\}, & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (y_i - g_2(T_{y_q}^{(n)}, u_2(n)_i))^2 \rightarrow \min. \end{cases} \quad (66)$$

Инициализировав  $\varphi$ ,  $\omega$  псевдослучайным образом на каждом  $n$ , получим траектории  $u_1(n)$  и  $u_2(n)$ , которые будут отличны от оптимальных. Оценивая ошибку для  $g_1(n)$  и  $g_2(n)$  на каждом временном шаге  $n$ , можно корректировать  $u_1(n)$  и  $u_2(n)$ , корректируя  $\varphi$ ,  $\omega$ , пока не будет найден локальный минимум целевого многоэкстремального функционала (65), удовлетворяющий

некоторому критерию качества. Для этого в диссертационной работе предложен численный метод на основе метода стохастического градиента, применимый в случае наличия граничных условий III-го рода (в частности, в ходе исследований был получен явный вид формул для вычисления частных производных целевого критерия – см. ниже):

$$\Delta\varphi_l^{(n)} = -\eta \cdot \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}; \Delta\omega_l^{(n)} = -\eta \cdot \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \omega_l^{(n)}}, \quad (67)$$

где  $E$  – ошибка, определенная в уравнении (65). Важно упомянуть, что рассматривается нетривиальный случай, когда известна только температура твердого тела после его нагрева ( $n=N$ ), а для всех остальных  $n$ -слоев она неизвестна. В таком случае частные производные ошибки из корректоров (67) будут иметь два различных набора функций для расчета: прямой вид и цепной вид. Формально, функции прямого вида могут быть применены только в тех узлах временной сети ( $n$ ), где имеется некоторая эталонная температура, для остальных узлов придется воспользоваться цепным видом функций. Рассмотрим функции расчета частных производных, имеющих прямой вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l} = \frac{\partial g_p(T_l^{(n)}, u_p(n))}{\partial \varphi_l} \cdot (y - g_p(T_l^{(n)}, u_p(n))); \\ \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \omega_l} = \frac{\partial g_p(T_l^{(n)}, u_p(n))}{\partial \omega_l} \cdot (y - g_p(T_l^{(n)}, u_p(n))). \end{cases} \quad p = \{1; 2\} \quad (68)$$

Для рассматриваемого нетривиального случая имеем неизвестными эталонные наблюдения на всех  $n \neq N$ . Однако, ошибку можно проследить через цепной вклад невязки на всех внутренних узлах, от  $n = (N-1)$  до  $n = 1$ . Для этого придется двигаться по временной оси от конца к началу, выполняя обратный «прогон», связывая ошибки на «внутренних» временных слоях некоторым цепным коэффициентом.

Этот цепной коэффициент определяется индивидуально для каждой из моделей. Рассмотрим его вывод для модели расчета вдоль  $Ox$ , предполагая, что логика вывода будет аналогична для модели расчета вдоль  $Oy$ .

Ошибки (65) для последнего состояния будут рассчитываться при  $n = N$ . Для того, чтобы получить ошибку на шаге  $t_{N-1}$ , нужно определить производную целевой функции на шаге  $t_{N-1}$ , а она на нем определена неявно. Для того, чтобы рассчитать функцию в неявном виде, необходимо обратиться к уравнению (61) для изменения состояния системы. Отсюда следует, что вклад каждого предыдущего состояния системы в будущее является мультипликативным с некоторым коэффициентом  $\delta_n$ :

$$\xi_{x_k}^{(N)} = \prod_{n=0}^{N-1} \delta^{(n)} \xi_{x_k}^{(n)}. \quad (69)$$

Коэффициент  $\delta^{(n)}$  на каждом шаге  $n$  может быть вычислен по следующей формуле:

$$\delta^{(n)} = \frac{h_x^2 \cdot \varphi_x^{(n)}}{\varphi_x^{(n)} \cdot h_x^2 + 2 \cdot \left( \frac{\varphi_x^{(n)}}{\omega_x^{(n)}} \right) \cdot \tau \cdot \varphi_x^{(n)} \cdot (1 - \alpha_{x_{k-1}})}. \quad (70)$$

Тогда, согласно (69), ошибка тоже будет накапливаться мультипликативно:

$$E_x^{(N)} = \hat{y} - \left( \prod_{n=0}^{N-1} \delta^{(n)} \xi_{x_k}^{(n)} \right), k = \overline{1, H-1}. \quad (71)$$

В результате, согласно принципу оптимальности, можно вывести условный минимум функции ошибки на  $(N-1)$ -м шаге:

$$E^{(N-1)} = \min_{u_1^{(N-1)}} [\delta^{(N-1)} \cdot g_1(T_{x_k}^{(N-1)}, u_1(N-1)) \cdot E^{(N)}]. \quad (72)$$

Заметим, что для нахождения производной данной функции ошибки на  $(N-1)$ -м шаге по  $\varphi$  нужно знать ошибку на предыдущем шаге и производную функции состояния по управлению и по самому состоянию:

$$\frac{\partial E_x^{(N-1)}}{\partial \varphi_x} = \delta^{(N-1)} \cdot \left[ \frac{\partial g_1(N-1)}{\partial T_x^{(N)}} \cdot \frac{\partial g_1(N-1)}{\partial \varphi_x} \right] \cdot (y - g_1(N)). \quad (73)$$

Выводы (69)–(73) справедливы и для системы  $Oy$ , за исключением того, что уравнение (70) будет иметь иной вид в соответствии с уравнением состояния:

$$\begin{cases} \delta_y^{(n)} = \frac{\omega_y^{(n)} \cdot h_y^2}{X_n} - \sqrt[4]{\frac{2 \cdot \tau \cdot \varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot h_y}{X_n}}, \\ X_n = 2 \cdot \tau \cdot \varphi_y^{(n)} \cdot (1 - \alpha_{y_q}^{(n-1)}) + 2 \cdot \tau \cdot \kappa_2 \cdot h_y + \omega_y^{(n)} \cdot h_y^2. \end{cases} \quad (74)$$

И, соответственно, уравнение ошибки для системы  $Oy$  будет иметь вид:

$$\frac{\partial E_y^{(N-1)}}{\partial \varphi_y} = \delta_y^{(N-1)} \cdot \left[ \frac{\partial g_2(N-1)}{\partial T_y^{(N)}} \cdot \frac{\partial g_2(N-1)}{\partial \varphi_y} \right] \cdot (y - g_2(N)). \quad (75)$$

Определим частные производные уравнений состояний  $g_1$  и  $g_2$  по самому состоянию в момент времени  $N$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial T_{x_k}^{(N)}} = \frac{h_x^2}{2 \cdot \left( \frac{\varphi_x^{(n)} \cdot \tau \cdot (1 - \alpha_{y_k}^{(n-1)})}{\omega_x^{(n)}} \right) + h_x^2}, \\ \frac{\partial g_2}{\partial T_{y_k}^{(N)}} = \frac{h_y \cdot (h_y \cdot \omega_y^{(n)} - 8 \cdot (\varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot \tau \cdot (T_{y_k}^{(n)})^3))}{h_y^2 \cdot \omega_y^{(n)} + \tau \cdot (2 \cdot (\varphi_y^{(n)} \cdot (1 - \alpha_{y_k}^{(n-1)})) + 2 \cdot (h_y \cdot \kappa_2))}. \end{cases} \quad (76)$$

Для определения частной производной  $g_1$  по  $\varphi_x$  воспользуемся формулой состояния (73) и для упрощения расчета производной сложной функции сделаем следующие замены повторяющихся частей функции:

$$\begin{cases} x_1^\varphi = h_x^2, \\ x_2^\varphi = \varphi_x^{(n)} \cdot \tau \cdot \frac{(1 - \alpha_{x_k}^{(n-1)})}{\omega_x^{(n)}}, \\ x_3^\varphi = 2 \cdot (h_x \cdot q_2), \end{cases} \quad \begin{cases} x_4^\varphi = \beta_{x_k}^{(n-1)} \cdot \varphi_x^{(n)}, \\ x_5^\varphi = \varphi_x^{(n)} \cdot \left( 2 \cdot \frac{\varphi_x^{(n)} \cdot \tau \cdot (1 - \alpha_{x_k}^{(n-1)})}{\omega_x^{(n)}} + h_x^2 \right), \\ x_6^\varphi = h_x^2 \cdot T_{x_k}^{(n)}. \end{cases} \quad (77)$$

С заменами (77) частная производная будет иметь вид:

$$\frac{\partial g_1}{\partial \varphi_x^{(n)}} = \frac{\left( x_6^\varphi + \frac{\tau \cdot (4 \cdot x_4^\varphi - x_3^\varphi)}{\omega_x^{(n)}} \right) \cdot (x_6^\varphi)^2}{x_5^\varphi - \varphi_x^{(n)} \cdot (4 \cdot (x_2^\varphi + x_1^\varphi)) \cdot \left( x_6^\varphi + \frac{\tau \cdot (2 \cdot x_4^\varphi - x_3^\varphi)}{\omega_x^{(n)}} \right)}. \quad (78)$$

Для  $g_2$  по  $\varphi_y$  воспользуемся уравнением (74) и выполним замену:

$$\begin{cases} y_1^\varphi = 1 - \alpha_{y_k}^{(n-1)}, \\ y_2^\varphi = h_y \cdot \kappa_2, \\ y_3^\varphi = h_y^2 \cdot \omega_y^{(n)} + \tau \cdot (2 \cdot (\varphi_y^{(n)} \cdot (1 - \alpha_{y_q}^{(n-1)})) + 2 \cdot h_y \cdot \kappa_2). \end{cases} \quad (79)$$

В результате получим уравнение частной производной вида:

$$\frac{\partial g_2}{\partial \varphi_y^{(n)}} = \tau \cdot (2 \cdot \beta_{y_q}^{(n-1)} - 2 \cdot \left( y_1^\omega \cdot \left( \frac{h_y \cdot (2 \cdot (y_2^\omega \cdot \sigma \cdot \tau \cdot (T_2^4 - (T_{y_q}^{(n)})^4)) + h_y \cdot \omega_y^{(n)} \cdot T_{y_q}^{(n)})}{y_3^\omega} + \right. \right. \right. \quad (80)$$

$$\left. \left. \left. + \frac{\tau \cdot (2 \cdot (\beta_{y_q}^{(n-1)} \cdot \varphi_y^{(n)}) + 2 \cdot (y_2^\omega \cdot T_{y_q}^{(n)}))}{y_3^\omega} \right) \right) \cdot \frac{1}{y_3^\omega}.$$

Аналогичным образом найдем частные производные  $g_1$  и  $g_2$  по  $\omega$ . Для начала получим формулу расчета частной производной уравнения состояния  $g_1$  по  $\omega_x$ , в результате получим систему (81) с произведенными заменами для упрощения восприятия формулы и более удобного использования в численном эксперименте:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g_1}{\partial \omega_x^{(n)}} = \tau \cdot \left( \frac{(x_5^\omega - x_3^\omega)}{x_4^\omega} + 2 \cdot \left( \frac{(\varphi_x^{(n)})^3 \cdot x_1^\omega \cdot (x_2^\omega \cdot T_{x_k}^{(n)} + \tau \cdot \frac{(x_3^\omega - x_5^\omega)}{\omega_x^{(n)}})}{(\varphi_x^{(n)} \cdot x_4^\omega)^2} \right) \right) \cdot \frac{1}{(\omega_x^{(n)})^2}, \\ x_1^\omega = 1 - \alpha_{x_k}^{(n-1)}, \\ x_2^\omega = h_x^2, \\ x_3^\omega = 2 \cdot (\beta_{x_k}^{(n-1)} \cdot \varphi_x^{(n)}), \\ x_4^\omega = 2 \cdot \left( \frac{\varphi_x^{(n)} \cdot \tau \cdot (1 - \alpha_{x_k}^{(n-1)})}{\omega_x^{(n)}} \right) + h_x^2, \\ x_5^\omega = 2 \cdot h_x \cdot q_2. \end{array} \right. \quad (81)$$

Аналогичным образом получим частную производную  $g_2$  по  $\omega_y$  в виде системы (82) с заменами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_y^{(n)}} = y_2^\omega \cdot \left( T_{y_q}^{(n)} - \frac{(h_y \cdot (2 \cdot (y_2^\omega \cdot \sigma \cdot \tau \cdot (T_2^4 - (T_{y_q}^{(n)})^4)) + h_y \cdot \omega_y^{(n)} \cdot T_{y_q}^{(n)})}{y_3^\omega} \right) + \\ \left. + \frac{\tau \cdot (2 \cdot (\beta_{y_q}^{(n-1)} \cdot \varphi_y^{(n)}) + 2 \cdot (y_1^\omega \cdot T_2))}{y_3^\omega} \cdot \frac{1}{y_3^\omega}, \right. \\ y_1^\omega = h_y \cdot \kappa_2, \\ y_2^\omega = h_y^2, \\ y_3^\omega = h_y^2 \cdot \omega_y^{(n)} + \tau \cdot (2 \cdot (\varphi_y^{(n)} \cdot (1 - \alpha_{y_q}^{(n-1)})) + 2 \cdot h_y \cdot \kappa_2. \end{array} \right. \quad (82)$$

Таким образом, используя приведенные выше формулы для частных производных, полученные в рамках данной диссертационной работы, можно для каждого  $n \neq N$  вычислять ошибку вида (73), (75) для каждой отдельной динамической системы ( $Ox$  и  $Oy$ ) и проводить коррекцию соответствующих коэффициентов  $\varphi^{(n)}$  и  $\omega^{(n)}$ , полагая движение в сторону оптимальной траектории. Суть данного процесса может быть проиллюстрирована следующей схемой (рис. 11).

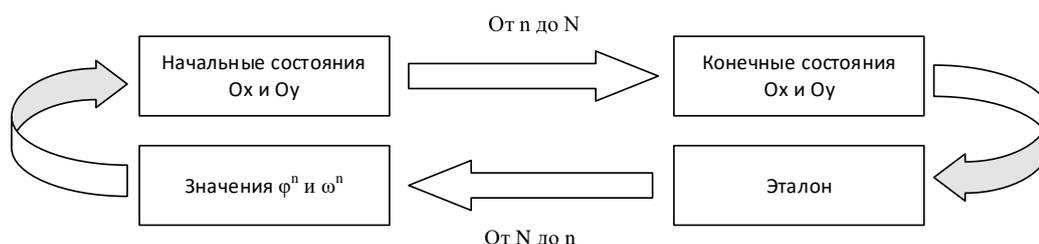


Рис. 11 – Схема настройки модели

Основной проблемой предложенного выше численного метода коррекции является проблема быстрого затухания градиента. Предварительный анализ и некоторые эксперименты с моделью на частных случаях показали, что шаг коррекции параметров должен быть динамическим и определенным образом нивелировать проблему затухания градиента. Данная проблема возникает из-за вида цепных уравнений (75) и перемножения частных производных с нелинейным коэффициентом. Предпосылки к ней наглядно иллюстрируются в численных экспериментах работы [100].

Кроме того, необходимо было обеспечить модель механизмом регуляризации, чтобы избежать слишком сильного роста значений настраиваемых параметров. В противном случае теоретическая скорость, которая будет рассмотрена далее, может оказаться недостижимой на практике.

В работах [48, 54] более детально изложены эксперименты с различными модификациями законов настройки параметров (67), которые позволяют учитывать проблему затухания градиента. А также эксперименты с двумя целевыми функциями: квадратом невязки, рассмотренным выше, и функцией потерь Хьюбера [101]:

$$E_l^{(n)} = \sum_{i=1}^M \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (T_i - f_l(\omega_l^{(n)}, \varphi_l^{(n)}, T_l^{(n)})_i)^2, e_i < d \\ d \cdot |T_i - f_l(\omega_l^{(n)}, \varphi_l^{(n)}, T_l^{(n)})_i| - \frac{1}{2} \cdot d, e_i \geq d \end{cases}, \quad (83)$$

где  $e_i = |(T_i - f_l(\omega_l^{(n)}, \varphi_l^{(n)}, T_l^{(n)})_i)|$ ,  $d$  – это граничный параметр, разделяющий пространство ошибки на линейное для больших её значений и квадратичное – для малых. Данная функция обладает эффектом регуляризации из-за того, что она линейная для больших значений ошибок и квадратичная – для малых.

В упомянутых выше работах [48] был сделан вывод о том, что для отдельного частного случая нагрева твердых тел из стали в среде высоких температур нет принципиальной разницы между квадратом невязки и функцией Хьюбера. При этом недостаточно сведений, чтобы можно было экстраполировать этот вывод на всю область применимости предложенного выше численного метода.

Для функции Хьюбера некоторые частные производные, определенные ранее, будут иметь другой вид. В частности, рассмотрим определение частной производной ошибки по  $\varphi$  для линейной части (83), предполагая, что для  $\omega$  она идентична:

$$\left. \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l} \right|_{e \geq d} = -d \cdot \text{sgn}(T - f_l(\omega_l^{(n)}, \varphi_l^{(n)}, T_l^{(n)})) \cdot \frac{\partial f_l(\omega_l^{(n)}, \varphi_l^{(n)}, T_l^{(n)})}{\partial \varphi_l}, \quad (84)$$

где  $\text{sgn}(\bullet)$  в общем виде может быть определен как следующая функция знака:

$$\text{sgn}(y - f(x)) = \begin{cases} 0, & (y - f(x)) = 0, \\ \frac{(y - f(x))}{|y - f(x)|}, & (y - f(x)) \neq 0. \end{cases} \quad (85)$$

Таким образом, частная производная ошибки (83) по  $\varphi_l$  имеет вид (86). Частная производная по  $\omega_l$  будет имеет аналогичную форму.

$$\frac{dE_l^{(n)}}{d\varphi_l} = \begin{cases} \frac{\partial f_l(\dots)}{\partial \varphi_l} \cdot (y - f_l(\dots)), & e_i < d, \\ -d \cdot \text{sgn}(y - f_l(\dots)) \cdot \frac{\partial f_l(\dots)}{\partial \varphi_l}, & e_i \geq d. \end{cases} \quad (86)$$

Замена целевой функции может решить проблему регуляризации, однако никак не влияет на проблему слишком быстрого затухания градиента. Для устранения последствий затухания в работе [39] рассматривались несколько модификаций закона настройки параметров (67). В частности, рассматривались ADADELTA [102] и ADAGRAD [103]. Модель адаптивного шага ADADELTA наиболее детально представлена в работе [102] и является расширением модели ADAGRAD. В основе метода лежит накопление экспоненциально убывающей средней квадратов градиентов.

Анализируя применимость этих модификаций градиентного спуска, был предложен собственный вид функций коррекции (67):

$$\Delta\varphi_l^{(n)} = -\left| \frac{k \cdot \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}}{\eta} + \eta \right| \cdot \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}; \Delta\omega_l^{(n)} = -\left| \frac{k \cdot \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \omega_l^{(n)}}}{\eta} + \eta \right| \cdot \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \omega_l^{(n)}}, \quad (87)$$

где  $k$  – это эмпирический подбираемый параметр. Предложенный оптимизатор (87) решает проблему «ускорения» работы численного метода неявной адаптации модели нестационарной теплопроводности.

Таким образом, за основу вышеизложенного численного метода был взят метод стохастического градиентного спуска и модифицирован под условия задачи. В рамках диссертационного исследования были получены базовые законы настройки предлагаемых в модели безразмерных параметров. Для формализации этих законов настройки в случае граничных условий III-го рода впервые были предложены конечные формы рекуррентных уравнений смены состояний (температур) моделей между узлами временной сети, которые зависят от введенных безразмерных параметров. На основании данных рекуррентных уравнений впервые были предложен конечный вид частных производных этих функций от температуры и настраиваемых параметров, как для квадрата невязки, так и для функции потерь Хьюбера.

При этом утверждается, что предложенный ранее численный метод и математическая модель нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией относится к классу эффективных методов и моделей. В частности,

это означает, что предложенное решение не относится к классу неполиномиальных задач по асимптотической сложности. Кроме того, предполагается, что алгоритмическая сложность и устойчивость предлагаемого численного метода не хуже алгоритмической сложности и устойчивости классического конечно-разностного и лучше решения с групповой “явной” адаптацией.

Для подкрепления данного утверждения проведем анализ устойчивости и сложности предлагаемого численного метода.

### 3.3 Анализ алгоритмической сложности и устойчивости

Проанализируем эффективность предлагаемого численного метода, для чего проведем исследование его алгоритмической сложности и устойчивости. Чтобы гарантировать эффективность предложенного математического решения с точки зрения его алгоритмической сложности, необходимо рассмотреть сначала сложность классической математической модели нестационарной теплопроводности на основе конечно-разностного решения.

Численным решением модели с покоординатным расщеплением (18) будет два независимых цикла (по сети вдоль  $Ox$  и  $Oy$  соответственно), обернутых в цикл расчета вдоль временной оси. В структуре единичного запуска этих внутренних циклов будет два подцикла согласно методу прямой и обратной прогонки (20)-(22). Тогда можно предположить, что класс алгоритмической сложности будет описываться следующей функцией:

$$f(H, W, N) = \sum_{t=0}^N \left( \sum_{j=0}^W \left[ \sum_{i=1}^H 1 + \sum_{i=H-2}^0 1 \right] + \sum_{i=0}^H \left[ \sum_{j=1}^W 1 + \sum_{j=W-2}^0 1 \right] \right). \quad (88)$$

Упростим суммы в функции (88) и раскроем скобки, в результате получив функцию вида:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^N \left( \sum_{j=0}^W \left[ \sum_{i=1}^H 1 + \sum_{i=W-2}^0 1 \right] + \sum_{i=0}^H \left[ \sum_{j=1}^W 1 + \sum_{j=W-2}^0 1 \right] \right) &\Rightarrow \sum_{t=0}^N \left( \sum_{j=0}^W [2 \cdot W - 1] + \sum_{i=0}^H [2 \cdot H - 1] \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{t=0}^N ([2 \cdot W \cdot H + 2 \cdot W - H - 1] + [2 \cdot W \cdot H + 2 \cdot W - H - 1]). \end{aligned} \quad (89)$$

В функции (89) получаем коэффициентное уравнение под знаком суммы, описывающее класс алгоритмической сложности численного решения классической математической модели нестационарной теплопроводности. Упростив последний оператор суммы и снова раскрыв скобки, получим функцию  $f(\bullet)$ , которая приближенно оценивает алгоритмическую сложность рассматриваемой модели:

$$f(H, W, N) = (4 \cdot W \cdot H + H + W - 2) \cdot (N + 1). \quad (90)$$

Рассмотрим симметричный случай, когда  $H = W = P$ , при этом каждый из параметров удовлетворяет требованию:

$$N, H, W \in \mathbb{N}. \quad (91)$$

Кроме прочего это означает, что пространственные сети равномерны по своему шагу. В таком виде функция (90) примет вид:

$$\begin{aligned} f_1(P, N) &= (4 \cdot P^2 + 2 \cdot P - 2) \cdot (N + 1); \\ f_1(P, N) &\in O(N \cdot P^2). \end{aligned} \quad (92)$$

Полученный класс сложности относится к группе полиномиальных классов второго порядка  $O(N \cdot P^2)$ , что уже упоминалось во второй главе данной работы. Там же упоминается, что если снабдить классический численный метод внешними моделями “явной” групповой адаптации, то они сформируют композицию из  $k$  моделей. Алгоритмическая асимптотическая сложность обхода такой композиции  $O(k)$ , но поскольку она определена в каждой отдельной точке пространственной сети, то общая сложность предлагаемой модели будет иметь вид  $O(N \cdot P^{2+k})$ .

Предложенная в данной главе математическая модель нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией базируется на системе (18). Это означает, что предложенный для неё численный метод будет также содержать два цикла обхода по узлам пространственных сетей, обернутых в цикл обхода по узлам временной сети. В таком виде функция, описывающая класс сложности предложенной математической модели и численного метода в её основе, будет частично повторять функцию (88). Отличительной особенностью численного метода будет являться наличие алгоритма

коррекции настраиваемых параметров. Такой алгоритм – это итеративный обход, т.е. одномерный цикл. Таким образом, функция приближенной алгоритмической сложности для такой модели будет иметь вид:

$$f_2(H, W, N) = \sum_{t=0}^N \left( \sum_{j=0}^W \left[ \sum_{i=1}^H 1 + \sum_{i=H-2}^0 1 \right] + \sum_{i=0}^H \left[ \sum_{j=1}^W 1 + \sum_{j=W-2}^0 1 \right] \right) + \sum_{t=0}^N 4. \quad (93)$$

Для единообразия сравнения будем рассматривать такой же симметричный случай ( $H=W=P$ ). Тогда часть функции (93) упростится по аналогии с функцией (89), что позволит сразу привести её к конечному виду:

$$f_2(H, W, N) = (4 \cdot P^2 + 2 \cdot P) \cdot (N + 1) + 4 \cdot (N + 1). \quad (94)$$

Данная функция будет относиться также к группе полиномиальных классов сложности второго порядка  $O(N \cdot P^2 + N)$ . Истинный вид функций (92) и (94) будет отличаться от предложенных здесь только коэффициентной частью.

Настройка параметров модели при помощи предложенного численного метода происходит на основании некоторой статистики, имеющей размерность  $V$ . Из-за чего класс сложности приобретает вид  $O(V \cdot (N \cdot P^2 + N))$ . Исследуем алгоритмическую сложность аналитически. Для этого, согласно теории сложности алгоритмов [105], рассмотрим пределы отношений двух функций сложности при условии стремления к бесконечности отдельных параметров. В частности рассмотрим как ведет себя предел отношения при условии, что размерность пространственной сети постоянна ( $H=W=P=const$ ):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{V \cdot (N \cdot P^2 + N)}{N \cdot P^{2+k}} = 2000 \Big|_{P=1, k=5, V=10000}. \quad (95)$$

Как можно заметить, предел отношения (95) есть константа, отличная от нуля. Это значит, что предложенный численный метод относительно временной сети прирастает также быстро, как и классический численный метод с групповой “явной” адаптацией. Зафиксируем размерность шагов по времени ( $N$ ):

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{V \cdot (N \cdot P^2 + N)}{N \cdot P^{2+k}} = 0 \Big|_{N=1, k=5, V=10000}. \quad (96)$$

Предел отношения (96), равный нулю, согласно теории алгоритмической сложности означает, что функция, расположенная в числителе отношения, прирастает медленней, чем функция, расположенная в знаменателе, при условии стремления свободного параметра к бесконечности.

Наконец рассмотрим ситуацию, при которой параметры  $V$  и  $k$  стремятся к бесконечности, а также их влияние при стремлении к бесконечности одного из параметров сетей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{V \rightarrow \infty} \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{V \cdot (N \cdot P^2 + N)}{N \cdot P^{2+k}} \right] = 0 \Big|_{P=100, N=10} \\ \lim_{V \rightarrow \infty} \left[ \lim_{P \rightarrow \infty} \left[ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{V \cdot (N \cdot P^2 + N)}{N \cdot P^{2+k}} \right] \right] = 0 \Big|_{N \in \mathbb{N}} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \lim_{V \rightarrow \infty} \left[ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{V \cdot (N \cdot P^2 + N)}{N \cdot P^{2+k}} \right] \right] = 0 \Big|_{P > 1} \end{array} \right. \quad (97)$$

Анализ алгоритмической сложности (95)-(97) позволяет говорить о том, что предложенный численный метод имеет практически идентичную алгоритмическую сложность по количеству узлов временной сети. В остальных случаях он имеет меньшую алгоритмическую сложность, чем численный метод конечных разностей с групповой “явной” адаптацией по количеству узлов пространственной сети.

Для подтверждения изложенного выше был проведен численный эксперимент. Рассмотрены три набора пространственных и временных сетей для разных параметров  $k$  и  $V$ . Результаты представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Результаты сравнения скорости сходимости моделей

Модель	Параметры	$N=100, P=10$	$N=625, P=25$	$N=10000, P=100$
Классический метод с групповой адаптацией	$k=1$	0,0000000286 с	0,0000011 с	0,00029 с
	$k=3$	0,000285 с	0,43 с	2857,2 с
Предложенный метод с неявной адаптацией	$V=5000$	0,000144 с	0,005589 с	1,42 с
	$V=10000$	0,000288 с	0,011178 с	2,85 с

Данный факт позволяет говорить о предложенном численном методе как об эффективном с точки зрения алгоритмической сложности. Для того, чтобы

можно было сделать вывод об эффективности предложенного численного метода с точки зрения его алгоритмической устойчивости, необходимо рассмотреть каким образом достигается устойчивость классического конечно-разностного метода.

Известно, что достаточным условием устойчивости модели является выполнение следующей системы неравенств [106]:

$$\begin{cases} B_l - C_l \cdot \alpha_{l-1} > 0, \\ |\alpha_l| < 1, \end{cases} \quad l = \overline{1, [W | H] - 1}. \quad (98)$$

Данная система базируется на условии (99), которое является следствием доказанной теоремы устойчивости [106] и корректности расчетов на ЭВМ.

$$|B_l| > |A_l| + |C_l|, \quad \forall l = \overline{2, [W | H] - 1}, \quad |\alpha_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_l| < 1. \quad (99)$$

Подставив известные формулы для расчета коэффициентов  $A_l$ ,  $B_l$  и  $C_l$  (25) в условие (99), получим неравенство вида:

$$\left| \frac{2 \cdot \lambda(T)}{h_l^2} + \frac{\rho(T) \cdot c(T)}{\tau} \right| > \left| \frac{\lambda(T)}{h_l^2} \right| + \left| \frac{\lambda(T)}{h_l^2} \right|. \quad (100)$$

Известно, что параметры  $h_l$ ,  $\tau$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  и  $c$  являются вещественными положительными числами, что гарантируется физическим обоснованием этих величин. В этом случае условие в виде неравенства (100) выполняется всегда, из чего следует доказанная устойчивость конечно-разностного решения на базе неявной разностной схемы (прямая и обратная прогонка).

Если рассмотреть это же неравенство (100), но для сделанных замен (57), получим неравенство:

$$\left| \frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)}}{h_l^2} + \frac{\omega_l^{(n)}}{\tau} \right| > \left| \frac{\varphi_l^{(n)}}{h_l^2} \right| + \left| \frac{\varphi_l^{(n)}}{h_l^2} \right|. \quad (101)$$

Замены (57) предполагают, что параметры  $\varphi$ ,  $\omega$  теперь просто вещественные знакопеременные числа. В этом случае условие (101), очевидно, нарушается при определенных комбинациях знаков. В частности, в упомянутом условии важен знак второго слагаемого. Для классической

ситуации (100) оно всегда положительно по причинам, означенным выше, но в предложенной численной модели оно явно будет нарушаться. Тривиальным решением в данном случае будет ограничение системой (102), из которых достаточным условием будет  $\omega_l^{(n)} > 0$ , так как  $\tau$  всегда положительно.

$$\begin{cases} \omega_l^{(n)} \neq 0, \\ \frac{\omega_l^{(n)}}{\tau} > 0. \end{cases} \quad (102)$$

Таким образом, замены (57) в неравенстве (101), имеющие вид неравенства (102), нарушают доказанный критерий устойчивости численного решения на ЭВМ. Ввиду этого, несмотря на то что в основе предложенной математической модели нестационарной теплопроводности и её классической интерпретации находится один и тот же принцип прямой и обратной прогонки, устойчивость первой не гарантируется. Ввиду этого факта была выдвинута следующая гипотеза.

Гипотеза №1. Помимо тривиального ограничения  $\omega_l^{(n)} > 0$  имеются такие ограничения для остальных параметров неравенства (102), включая смещения  $\omega_l^{(n)}$ ,  $\varphi_l^{(n)}$  относительно друг друга, при которых базовое условие (99) не нарушается в процессе решения на ЭВМ, что можно интерпретировать как доказательство устойчивости предложенной модели на основании доказанной устойчивости классической конечно-разностной модели нестационарной теплопроводности.

Для доказательства сделанного выше предположения, рассмотрим работы [107, 108]. В них представлено условие сходимости решения дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности с его аппроксимацией конечно-разностными сеточными представлениями дифференциальных операторов:

$$\tau < \frac{\rho \cdot c \cdot h_l^2}{2 \cdot \lambda}. \quad (103)$$

Выполним неоднократно упомянутые замены (57) в неравенстве (103), получив условие вида:

$$\tau < \frac{\omega_l^{(n)} \cdot h_l^2}{2 \cdot \varphi_l^{(n)}}. \quad (104)$$

Проанализируем полученное условие. Для этого выразим его относительно нуля, перенеся дробное отношение из правой части в левую, предполагая, что  $\varphi$  и  $\omega$  положительны.

$$\frac{\tau \cdot 2 \cdot \varphi_l^{(n)} - \omega_l^{(n)} \cdot h_l^2}{2 \cdot \varphi_l^{(n)}} < 0. \quad (105)$$

Известно, что неравенство (105) имеет два набора решений – (106). Однако, упомянутая выше неотрицательность параметров оставляет только одно решение  $\tau \cdot 2 \cdot \varphi_l^{(n)} - \omega_l^{(n)} \cdot h_l^2 < 0$ .

$$\left[ \begin{cases} 2 \cdot \varphi_l^{(n)} < 0, \\ \tau \cdot 2 \cdot \varphi_l^{(n)} - \omega_l^{(n)} \cdot h_l^2 > 0, \\ 2 \cdot \varphi_l^{(n)} > 0, \\ \tau \cdot 2 \cdot \varphi_l^{(n)} - \omega_l^{(n)} \cdot h_l^2 < 0. \end{cases} \right. \quad (106)$$

Перенесем в левую часть вычитаемое представленного выше условия и получим, что неравенство (105) выполняется только когда выполняется неравенство  $|\tau \cdot 2 \cdot \varphi_l^{(n)}| < |\omega_l^{(n)} \cdot h_l^2|$ . Теперь предположим, что  $2 \cdot \varphi_l^{(n)} = \omega_l^{(n)}$ , тогда упомянутое чуть ранее неравенство можно преобразовать следующим образом:

$$|2 \cdot \varphi_l^{(n)} \cdot \tau| < |\omega_l^{(n)} \cdot h_l^2| \Big|_{2 \cdot \varphi_l^{(n)} = \omega_l^{(n)}} \Rightarrow \frac{t_{\max}}{N} < \frac{X^2}{L^2} \Rightarrow \frac{L^2 \cdot t_{\max} - N \cdot X^2}{N \cdot L^2} < 0. \quad (107)$$

Здесь  $X$  – это характеристический размер твердого тела (которое участвует в расчете шагов по пространственным сетям);  $t_{\max}$  – это максимальное время моделирования (которое участвует в расчете шага по временной сети);  $L=[H|W]$  – количество шагов по пространству в зависимости от приложения к модели ( $Ox$  или  $Oy$  соответственно).

В результате неравенство (107) опять представляет собой дробное отношение, которое по аналогии с неравенством (105) будет иметь два набора решений. Здесь можно устранить неопределенность, если взять во внимание

ограничение (91), рассмотренное при анализе алгоритмической сложности. В таком случае, количество узлов как по пространственным сетям, так и по временной будут положительными целыми числами, что позволяет предположить, что условие (107) будет иметь только одно решение  $L^2 \cdot t_{max} - N \cdot X^2 < 0$ .

Здесь рассматривается алгоритмическая устойчивость решения, а это значит, что никакое из условий не должно нарушаться в процессе реализации алгоритма на ЭВМ. Согласно структуре предлагаемой модели, такие параметры как  $L$  или  $N$  являются условно постоянными. То, как часто эти параметры могут изменяться, задает конечный пользователь, но они никогда не будут меняться уже в процессе выполнения алгоритма. Предположим, гипотетическую ситуацию, при которой  $t_{max} = X^2$ . Тогда получается, что для выполнения условия (107) необходимо, чтобы  $N > L^2$ . Здесь важно понимать, что речь идет об алгоритмическом решении на ЭВМ, а значит что отдельные упомянутые параметры воспринимаются как типы данных определенной размерности, заключенных в определенных ОДЗ.

Условие  $N > L^2$ , во-первых, сильно увеличивает крупность сетей из-за чего значительно возрастает некоторая «минимальная» сложность модели. Во-вторых, на практике чаще всего характеристические размеры твердых тел в абсолютных вещественных значениях сильно меньше, чем время моделирования ( $t_{max} \gg X^2$ ). Это приводит к тому, что и без того грубое условие  $N > L^2$  приобретает вид  $N \gg L^2$ . Как было сказано ранее, в контексте рассматриваемых параметров речь идет об их значениях, представленных на некоторых числовых прямых. В таком случае разница между  $N$  и  $L^2$  будет определяться величинами параметров  $t_{max}$ ,  $X^2$ ,  $\varphi_l^{(n)}$ ,  $\omega_l^{(n)}$ . Это неприемлемо, так как параметры максимального времени моделирования ( $t_{max}$ ) и квадрат характеристического размера твердого тела ( $X^2$ ) – это внешние ненастраиваемые параметры, определенные, как правило, отдельно для каждого твердого тела. Из-за того, что эти параметры определяются не для модели, то в предложенном численном методе возникает противоречие.

Количество шагов по пространству и по времени в соответствующих сетях будет изменяться для каждого тела, представленного в некоторой статистике, на которой настраиваются параметры  $\varphi_l^{(n)}$ ,  $\omega_l^{(n)}$ . Таким образом, условие (107) может нарушаться в процессе жизненного цикла модели. Это может привести к тому, что модель окажется либо слишком сложной для расчета в режиме реального времени, либо будут возникать ситуации неопределенности в расчетах вещественных чисел, что сделает невозможным получение решения на ЭВМ.

Разрешить это противоречие в представленных ограничениях  $\varphi_l^{(n)} > 0$ ,  $\omega_l^{(n)} > 0$ , невозможно, а это значит необходимо вывести более строгие ограничения, которые бы позволили параметрам шагов по временной и пространственным сетям не зависеть от  $t_{max}$  и  $X$  и процесса настройки параметров  $\varphi_l^{(n)}$ ,  $\omega_l^{(n)}$ . Для этого была выдвинута следующая гипотеза.

Гипотеза №2. Существует такое смещение  $\omega_l^{(n)}$  относительно  $\varphi_l^{(n)}$ , при котором условие (107) выполняется при нестрогом неравенстве вида  $N \geq L^2$  вместо строго  $N > L^2$  и не зависит от  $t_{max}$  и  $X^2$ .

Проанализируем условие (107) детальной, предположив, что  $2 \cdot \varphi_l^{(n)} \neq \omega_l^{(n)}$ . В результате получим тоже самое условие, но в полном виде:

$$\frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)} \cdot L^2 \cdot t_{max} - \omega_l^{(n)} \cdot N \cdot X^2}{N \cdot L^2} < 0. \quad (108)$$

Из-за ограничения (91) знаменатель никогда не будет отрицательным, поэтому единственным решением (108) будет отрицательность числителя. Это приведет к получению условия:

$$2 \cdot \varphi_l^{(n)} \cdot L^2 \cdot t_{max} - \omega_l^{(n)} \cdot N \cdot X^2 < 0. \quad (109)$$

Выразив это условие относительно количества шагов по времени ( $N$ ), при условии, что  $\omega_l^{(n)} > 0$ , можно получить неравенство:

$$\frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)} \cdot L^2 \cdot t_{max}}{\omega_l^{(n)} \cdot X^2} < N \Rightarrow \frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)}}{\omega_l^{(n)}} \cdot \frac{t_{max}}{X^2} \cdot L^2 < N. \quad (110)$$

Все значения представленных в (110) параметров – это числа, определенные на некоторой десятичной числовой оси. Ввиду этого факта

можно прологарифмировать правую и левую часть по основанию 10, получив условие:

$$\lg\left(\frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)}}{\omega_l^{(n)}} \cdot \frac{t_{\max}}{X^2} \cdot L^2\right) < \lg(N). \quad (111)$$

Благодаря тому, что логарифм произведения есть сумма логарифмов, условие (111) можно представить в виде условия:

$$\lg\left(\frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)}}{\omega_l^{(n)}}\right) + \lg\left(\frac{t_{\max}}{X^2}\right) + \lg(L^2) < \lg(N). \quad (112)$$

Теперь сделаем предположение, что количество шагов по пространству и по времени имеют одинаковый порядок крупности по значениям (это эквивалентно условию  $\lg(L^2) = \lg(N)$ ). Выразив (112) с этим предположением относительно отношения  $t_{\max}$  к  $X^2$ , получим условие:

$$\lg\left(\frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)}}{\omega_l^{(n)}}\right) < -\lg\left(\frac{t_{\max}}{X^2}\right). \quad (113)$$

В левой части условия (113) находится отношение  $\varphi_l^{(n)}$  и  $\omega_l^{(n)}$ , множитель в числителе можно воспринимать как коэффициентный показатель, что дает возможность оценить крупность (порядок) смещения по десятичной шкале между этими двумя значениями. Это позволит определить ограничения, при которых условие (107) выполняется с нестрогим ограничением  $N \geq L^2$ , но никак не позволит избежать зависимости шагов по пространственным и временной сети от параметров  $t_{\max}$  и  $X$ .

Для того, чтобы решить эту проблему, рассмотрим вместо упомянутых параметров их оценки. Предположим, что максимальное время моделирования и характеристический размер твердого тела заперты в некотором известном диапазоне из вещественных чисел таким образом, чтобы  $t_{\max} \in (t_1, t_2)$  и  $X^2 \in (X_1^2, X_2^2)$ , где  $t_1, t_2, X_1^2, X_2^2$  – это крайние значения этих диапазонов. Тогда неравенство (113) можно переписать в виде неравенства (114).

$$\lg\left(\frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)}}{\omega_l^{(n)}}\right) < -\lg\left(\frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)}\right). \quad (114)$$

Воспользуемся свойствами логарифма и перепишем (114) в виде неравенства (115):

$$\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) - \lg(\omega_l^{(n)}) < -\lg\left(\frac{t_2 - t_1}{X_2^2 - X_1^2}\right). \quad (115)$$

Теперь, в условии (115) справа статические параметры, определенные для всех твердых тел в некоторой статистической выборке, что позволяет рассматривать параметры  $N$  и  $L$  также статическими по значениям. Слева в условии (115) располагаются динамические параметры, которые изменяют свои числовые значения в процессе решения на ЭВМ.

Статическая часть неравенства (115) может быть определена в момент первичной инициализации модели, что позволяет получить оценку величины смещения  $\omega_l^{(n)}$  относительно  $\varphi_l^{(n)}$  на числовой десятичной оси по значению:

$$\begin{aligned} -\lg(\omega_l^{(n)}) < -\lg\left(\frac{t_2 - t_1}{X_2^2 - X_1^2}\right) - \lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) \Big|_{\times(-1)} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lg(\omega_l^{(n)}) > \lg\left(\frac{t_2 - t_1}{X_2^2 - X_1^2}\right) + \lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}). & \end{aligned} \quad (116)$$

Из неравенства (116) закономерно следует, что параметр  $\omega_l^{(n)}$  имеет принадлежность к некоторой области на упомянутой десятичной числовой оси, которую можно определить в виде диапазона (117). В таком виде условие (107) будет выполняться при нестрогом ограничении на количества узлов пространственных и временной сетей ( $N \geq L^2$ )

$$\omega_l^{(n)} \in \left(10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{t_2 - t_1}{X_2^2 - X_1^2}\right) + 1}; (+D_{\max} - \gamma) \cdot 10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{t_2 - t_1}{X_2^2 - X_1^2}\right) + 1}\right), \quad (117)$$

где  $D_{\max}$  – это программные ограничения хранения вещественных чисел;  $\gamma$  – это эмпирически выбираемый параметр смещения относительно максимально поддерживаемой величины мантииссы вещественного числа на ЭВМ ( $D_{\max}$ ). Таким образом, для соблюдения условия устойчивости (107) первичная инициализация модели должна происходить согласно следующей системе – (118).

$$\begin{cases} \varphi_l^{(n)} \in (0; +D_{\max} - \gamma), \\ \omega_l^{(n)} \in (10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg(\frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)}) + 1}; (+D_{\max} - \gamma) \cdot 10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg(\frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)}) + 1}). \end{cases} \quad (118)$$

Соблюдая ограничения (118), можно сделать обоснованное предположение, что устойчивость предложенной математической модели будет гарантироваться доказанным условием устойчивости классической модели нестационарной теплопроводности. Общие ограничения модели будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \varphi_l^{(n)} > 0, \omega_l^{(n)} > 0, N \geq L^2, \\ \omega_l^{(n)} \in (10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg(\frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)}) + 1}; (+D_{\max} - \gamma) \cdot 10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg(\frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)}) + 1}). \end{cases} \quad (119)$$

Для того, чтобы убедиться в адекватности сделанных предположений, включая ограничения (118)-(119), было решено провести численный эксперимент. Для этого была сформирована модель с ограничениями (М3) и две контрольные модели: 1) предложенная модель без дополнительных ограничений (М1); 2) Модель, реализующая только ограничение вида  $N \geq L^2$  (М2). Все модели имели одинаковую структуру по пространственным сетям ( $W = H = 25$ ) и различную структуру по временным сетям ( $N_{M1} = 50$ ,  $N_{M2} = N_{M3} = 625$ ).

Статистические сведения для формирования различных начальных условий модели (в том числе и по входным параметрам) были взяты те же, что использовались в работе [44]. В качестве контрольных отметок были выделены 200 и 400 успешно завершенных итераций коррекции параметров  $\varphi$  и  $\omega$ , а общее количество экспериментов было равно 60.

Результаты экспериментов моделей приведены в таблице 4. Здесь под «запуском» понимается эксперимент модели от старта алгоритма до его формального завершения критерием остановки (400 итераций) или ошибкой.

Графическое сравнение результатов приведено на рисунке 12.

Таблица 4 – Результаты теста на устойчивость

	Общее кол-во запусков	Успешно прошли 200 итераций коррекции	Успешно прошли 400 итераций коррекции	Неустойчивые запуски
M1	60	30	6	30
M2	60	45	34	15
M3	60	47	38	13

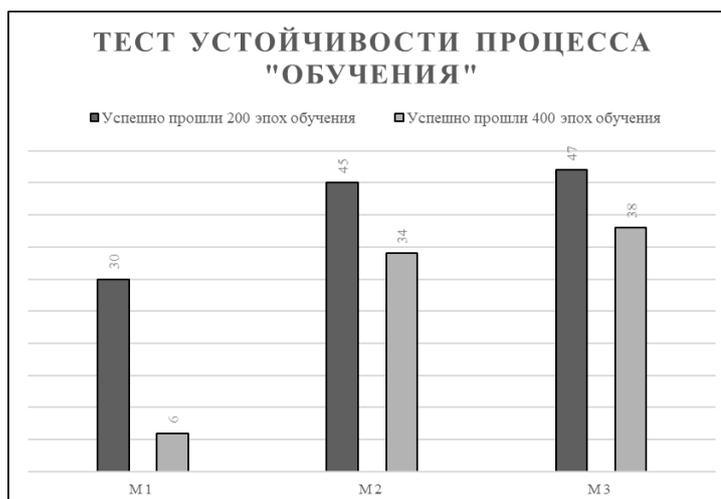


Рис. 12 – Сравнительная гистограмма теста на устойчивость

В таблице 5 приведена оценка численного эксперимента, согласно которой для модели, реализующей ограничения (118) и (119), наблюдается рост устойчивости относительно двух контрольных моделей. Модель №3 в среднем на 61% более устойчива по траекториям коррекции параметров и на 14% более устойчива по начальным условиям.

Таблица 5 – Результаты тестов на устойчивость

	Процент успешно устойчивых прогонов от устойчивых запусков	Общий процент устойчивых запусков
M1	20 %	50 %
M2	76 %	57 %
M3	81 %	64 %

Несмотря на то, что общее число «успешных» устойчивых прогонов модели возросло, всё еще остается порядка 36% процентов случаев неустойчивого пуска, которые приводят алгоритм к ошибке. Предполагалось, что это является следствием нарушения упомянутых условий устойчивости в процессе коррекции. Чтобы устранить предложенную проблему, необходимо

было предложить алгоритмическое условие на функции коррекции параметров, которые бы позволили им не нарушать условия (118) и (119) в процессе настройки. Суть предложенного решения такова: если модель прямого решения попадает в область неустойчивости, то произвольным образом отбирается 20% от имеющихся параметров  $\varphi$  и  $\omega$  и повторно инициализируются. Это позволяет сдвинуть на  $(V+1)$ -й итерации коррекции параметров модель в некоторую новую область, которая может оказаться устойчивой.

Чтобы в процессе коррекции параметров реже нарушались условия (114), было предложен следящий подход (120)-(121), где «*new*(•)» – это функция повторной инициализации параметра, упомянутая ранее.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi_l^{(n)} = \text{new}(\varphi_l^{(n)}) \\ \omega_{corr} = \left[ 10^{\lg(2\cdot\varphi_l^{(n)}) + \lg(\frac{t_2-t_1}{X_2^2-X_1^2}) + 1} \right] \\ \Delta\omega_l^{(n)} = -(0 - \Delta\omega_l^{(n)}) + \Delta\varphi_l^{(n)} \cdot \omega_{corr} \end{array} \right. , \text{ при } \Delta\omega_l^{(n)} < 0 \text{ или } \Delta\varphi_l^{(n)} < 0 \quad (120)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi_l^{(n)} = - \left| \frac{k \cdot \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}}{\eta} \right| \cdot \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}} \\ \omega_{corr} = \left[ 10^{\lg(2\cdot\varphi_l^{(n)}) + \lg(\frac{t_2-t_1}{X_2^2-X_1^2}) + 1} \right] \\ \Delta\omega_l^{(n)} = - \left| \frac{k \cdot \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}}{\eta} \right| \cdot \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}} \cdot \omega_{corr} \end{array} \right. , \text{ при } \Delta\omega_l^{(n)} \geq 0 \text{ и } \Delta\varphi_l^{(n)} \geq 0 \quad (121)$$

С учетом внесенных корректировок (120)-(121) в модель, эксперименты были проведены повторно (табл.6). Устойчивость была повышена до 98%. По оставшимся 2% запусков был сделан вывод о том, что они возникли ввиду неидеальной работы программной среды исполнения режима реального времени с очень малыми действительными числами.

Таблица 6 – Результат теста на устойчивость с учетом (120) и (121)

Модель	Процент успешно устойчивых прогонов от устойчивых запусков	Общий процент устойчивых запусков
M1	41 %	67 %
M2	84 %	82 %
M3	100 %	98 %

Как было сказано при рассмотрении проблемы “явной” адаптации, особенно нетривиальной она становится, когда необходимо помимо теплофизических параметров нагреваемого твердого тела восстановить еще и параметры условий теплообмена. Для решения этой задачи можно использовать предложенный ранее подход приведения к неявной адаптации. Рассмотрим его детальней.

### **3.4 Неявная адаптация к условиям нестационарного теплообмена**

Процесс “явной” адаптации к условиям нестационарного теплообмена на границе твердого тела, приведенный в п.2.2.2, обладает рядом существенных недостатков:

1) весь процесс адаптации опирается на критериальное уравнение (практически эвристику), качество применения которого зависит от качества идентификации изопротесса и условий движения конвективной среды;

2) расчетные числа Грасгофа, Нуссельта, Прандтля и Рейнольса опираются на восстановленные температурные динамики физических и теплофизических величин теплоносителя (теплопроводности, теплоемкости, плотности, динамической и кинетической вязкости и др.). Качество расчетов критериальных чисел сильно зависит от качества подобранных регрессионных уравнений, восстанавливающих их динамику;

3) процесс подбора конечного вида критериального уравнения и регрессионных уравнений динамики превращается в отдельное исследование, которое, кроме прочего, жестко привязывает модель к конкретному технологическому процессу или объекту.

Было предложено решение проблемы адаптации к условиям нестационарного теплообмена на границе твердого тела при помощи модели, представленной в п.3.1. Рассмотрим её приложение детально. Пусть на каждой из границ твердого тела, где выполняются граничные условия III-го рода, определен свой коэффициент теплообмена. Для двумерной постановки, как правило, этот коэффициент расщепляется вместе с двумерным уравнением и представляет собой два отдельных коэффициента ( $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  соответственно). Пусть имеет место аналогичная (57) замена, но только для рассматриваемых коэффициентов. Тогда  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  могут быть представлены также как векторы, коллинеарные временной оси  $[0, N]$ :

$$\kappa_1 = \{\kappa_1^{(n)} \mid n = \overline{0, N}\}; \quad \kappa_2 = \{\kappa_2^{(n)} \mid n = \overline{0, N}\}. \quad (122)$$

Опираясь на (122), можно дополнить управления (62) вышеизложенным коэффициентами, получив следующие уравнения смены состояний:

$$u_1(n) = \{\varphi_x^{(n)}, \omega_x^{(n)}, \kappa_1^{(n)}\}, u_2(n) = \{\varphi_y^{(n)}, \omega_y^{(n)}, \kappa_2^{(n)}\}. \quad (123)$$

Дополним решение, представленное в п.3.2, моделью коррекции параметров  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  на каждом временном слое  $n$ . Коррекция будет производиться предлагаемым методом модифицированного стохастического градиентного спуска, который подчиняется следующему закону:

$$\Delta \kappa_p^{(n)} = \begin{cases} k \cdot \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \kappa_p^{(n)}} - \left| \frac{\partial \kappa_p^{(n)}}{\eta} + \eta \right| \cdot \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \kappa_p^{(n)}}, & \text{если } \kappa_p^{(n)} > 0, \\ \text{new}(\kappa_p^{(n)}), & \text{если } \kappa_p^{(n)} \leq 0, \end{cases} \quad (124)$$

где  $p = 1$  для модели вдоль  $Ox$ ;  $p = 2$  для модели вдоль  $Oy$ . Здесь  $E$  – это ошибка, определенная в виде (65) при условии, что управления сменой состояний  $g_1$  и  $g_2$  теперь будут имеет вид (123). Закон коррекции коэффициента теплообмена (124) сразу учитывает ограничения устойчивости по аналогии с рассмотренными в п.3.3.

Частная производная ошибки будет иметь вид (125) для конечного временного узла (конца нагрева)  $n=N$ , на котором известно эталонное значение температуры.

$$\frac{\partial E^{(n)}}{\partial \kappa_p^{(n)}} = \frac{\partial g_p(T_l^{(n)}, u_p(n))}{\partial \kappa_p} \cdot (y - g_p(T_l^{(n)}, u_p(n))). \quad (125)$$

Расчет частных производных на  $n \neq N$  будет проводиться путем применения цепного уравнения вида (126), где  $\delta_n^{(p)}$  – это коэффициент цепной связи ошибки между слоями.

$$\frac{\partial E_l^{(N-1)}}{\partial \kappa_p} = \delta_{N-1}^{(p)} \cdot \left( \frac{\partial g_p(T_l^{(N-1)}, u_p(N-1))}{\partial T_l^{(N)}} \cdot \frac{\partial g_p(T_l^{(N)}, u_p(N))}{\partial \kappa_p} \right) \cdot (y - g_p(T_l^{(N)}, u_p(N))). \quad (126)$$

Для  $p = 1$  этот коэффициент будет иметь вид (70), для  $p = 2$  этот коэффициент будет иметь вид (74). Уравнение расчета частной производной  $\partial g_p / \partial T_l$  представлено в системе (76). Необходимо было найти конечный вид частной производной  $\partial g_p / \partial \kappa_p$ . Воспользуемся уравнением состояния  $g_1$  и заметим, что в нем отсутствует в явном виде параметр  $\kappa_1$ , по которому нужно получить частную производную. Приведем параметр явно, заменив прогоночные коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  соответствующими уравнениями:

$$\begin{aligned} g_1(T_{x_k}^{(n)}, \{\varphi_x^{(n)}, \omega_x^{(n)}\}) &= 2 \cdot \left( \frac{\varphi_x^{(n)}}{\omega_x^{(n)}} \right) \cdot \tau \cdot \varphi_x^{(n)} \times \\ &\times \frac{\left[ \frac{\omega_x^{(n)} \cdot h_x^2 \cdot T_{x_k}^{(n)} + 2\tau \cdot \kappa_1 \cdot h_x \cdot T_1 + 2\tau \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot h_x \cdot ([T_1]^4 - [T_{x_k}^{(n)}]^4)}{\omega_x^{(n)} \cdot h_x^2 + 2\tau \cdot (\varphi_x^{(n)} + \kappa_1 \cdot h_x)} \right]_{x_{k-1}}}{\varphi_x^{(n)} \cdot h_x^2 + 2 \cdot \left( \frac{\varphi_x^{(n)}}{\omega_x^{(n)}} \right) \cdot \tau \cdot \varphi_x^{(n)} \cdot \left( 1 - \left[ \frac{2\varphi_x^{(n)} \cdot \tau}{\omega_x^{(n)} \cdot h_x^2 + 2\tau \cdot (\varphi_x^{(n)} + \kappa_1 \cdot h_x)} \right]_{x_{k-1}} \right)} \\ &\quad - \frac{2 \cdot \left( \frac{\varphi_x^{(n)}}{\omega_x^{(n)}} \right) \cdot \tau \cdot h_x \cdot q_2 + h_x^2 \cdot \varphi_x^{(n)} \cdot T_{x_k}^{(n)}}{\varphi_x^{(n)} \cdot h_x^2 + 2 \cdot \left( \frac{\varphi_x^{(n)}}{\omega_x^{(n)}} \right) \cdot \tau \cdot \varphi_x^{(n)} \cdot \left( 1 - \left[ \frac{2\varphi_x^{(n)} \cdot \tau}{\omega_x^{(n)} \cdot h_x^2 + 2\tau \cdot (\varphi_x^{(n)} + \kappa_1 \cdot h_x)} \right]_{x_{k-1}} \right)}. \end{aligned} \quad (127)$$

Для упрощения расчета производной воспользуемся следующими заменами:

$$\begin{cases} y_1 = \omega_x^{(n)} \cdot (h_x^2 \cdot \omega_x^{(n)} + 2 \cdot \tau \cdot [\varphi_x^{(n)} \cdot h_x \cdot \kappa_1]), \\ y_2 = T_{x_k}^{(n)} \cdot h_x^2 \cdot \omega_x^{(n)} + 2T_1 \cdot h_x \cdot \kappa_1 \cdot \tau - 2 \cdot \sigma \cdot \varepsilon_1 \cdot h_x \cdot \tau \cdot ([T_{x_k}^{(n)}]^4 - [T_1]^4), \\ y_3 = 2 \cdot [\varphi_x^{(n)}]^2 \cdot \tau \cdot \left( 2\varphi_x^{(n)} \cdot \tau / (h_x^2 \cdot \omega_x^{(n)} + 2\tau \cdot [\varphi_x^{(n)} \cdot h_x \cdot \kappa_1]) - 1 \right). \end{cases} \quad (128)$$

Опираясь на замены (128), вычислим частную производную по  $\kappa_1$  для развернутого уравнения смены состояния (127):

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1(n)}{\partial \kappa_1} = & \frac{4 \cdot [\varphi_x^{(n)}]^2 \cdot h_x \cdot \tau^2 \cdot y_2}{y_1^2} - \frac{4 \cdot T_1 \cdot [\varphi_x^{(n)}]^2 \cdot h_x \cdot \tau^2}{y_1} - \\ & \frac{\varphi_x^{(n)} \cdot h_x^2 - \left( \frac{y_3}{\omega_x^{(n)}} \right)}{\left( T_{x_k}^{(n)} \cdot \varphi \cdot h_x^2 - \frac{2 \varphi_x^{(n)} \cdot h_x \cdot q_2 \cdot \tau}{\omega_x^{(n)}} + \frac{2 \cdot [\varphi_x^{(n)}]^2 \cdot \tau \cdot y_2}{y_1} \right)} \\ & - 8 \cdot [\varphi_x^{(n)}]^3 \cdot h_x \cdot \tau^3 \cdot \frac{\left( T_{x_k}^{(n)} \cdot \varphi \cdot h_x^2 - \frac{2 \varphi_x^{(n)} \cdot h_x \cdot q_2 \cdot \tau}{\omega_x^{(n)}} + \frac{2 \cdot [\varphi_x^{(n)}]^2 \cdot \tau \cdot y_2}{y_1} \right)}{\omega_x^{(n)} \cdot (h_x^2 \cdot \omega_x^{(n)} + 2 \tau \cdot (\varphi_x^{(n)} \cdot \kappa_1 \cdot h_x))^2 \cdot \left( \varphi_x^{(n)} \cdot h_x^2 - \frac{y_3}{\omega_x^{(n)}} \right)^2}. \end{aligned} \quad (129)$$

Для определения частной производной  $g_2$  по  $\kappa_2$  воспользуемся уже известным уравнением смены состояния (64). Так как в нем явно представлено значение  $\kappa_2$ , никакие преобразования не потребуются, и частная производная будет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2(n)}{\partial \kappa_2} = & \frac{2 \cdot \tau \cdot h_y \cdot T_{y_q}^{(n)}}{\omega_y^{(n)} \cdot h_y^2 + 2 \cdot \tau \cdot \kappa_2 \cdot h_y - 2 \cdot \tau \cdot \varphi_y^{(n)} \cdot (\alpha_{y_{q-1}} - 1)} - \\ & \frac{2 \cdot h_y \cdot \tau \cdot (2 \cdot \tau \cdot \varphi_y^{(n)} \cdot \beta_{y_{q-1}} + T_{y_q}^{(n)} \cdot h_y^2 \cdot \omega_y^{(n)} + 2 \cdot \tau \cdot \varepsilon_2 \cdot \sigma \cdot h_y \cdot ([T_2]^4 - [T_{y_q}^{(n)}]^4))}{[\omega_y^{(n)} \cdot h_y^2 + 2 \cdot \tau \cdot \kappa_2 \cdot h_y - 2 \cdot \tau \cdot \varphi_y^{(n)} \cdot (\alpha_{y_{q-1}} - 1)]^2}. \end{aligned} \quad (130)$$

Таким образом, предложенный численный метод, позволяющий заменить процедуру “явной” адаптации на некоторую задачу поиска оптимальных управлений состояниями моделей нестационарной теплопроводности, был дополнен математической моделью (121)-(126). В таком виде данный численный метод позволяет неявным образом адаптировать модель нестационарной теплопроводности еще и к условиям теплообмена на границе твердого тела.

Сравним предложенное решение с классической моделью. В работах [55, 57] приводились исследования процедуры “явной” адаптации конечно-разностной модели нестационарной теплопроводности при нагреве твердых тел из стали «марки 20» в многозонной проходной печи. Для проведения сравнительного эксперимента, возьмем данные из этих исследований, представляющих собой статистику о протекающем нестационарном тепловом

процессе (время нагрева твердого тела, температура теплоносителя в разные моменты времени нагрева, линейные размеры твердого тела и его масса).

В рамках сравнительного эксперимента оценивались критерии:

- 1) минимальная достигнутая ошибка оценки конечной температуры заготовки;
- 2) количество итераций настройки коэффициентов, потраченных на уменьшение ошибки ниже 31 °С.

Ошибка в 31 °С – это некоторая эталонная ошибка из работы [55], которую удалось достичь сеточной моделью с “явной” адаптацией теплофизических параметров твердого тела и “явной” адаптацией к условиям теплообмена на границе. Чтобы достичь такой ошибки, параметры  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c$  были восстановлены при помощи регрессионных уравнений на основе справочников физических величин, параметры  $k_1$  и  $k_2$  были рассчитаны моделью на основании критериального уравнения для числа Нуссельта. Это сугубо частный случай, когда приблизительно известна характеристика теплообмена, позволяющая определить конечный вид упомянутого выше критериального уравнения. И сделать так можно далеко не всегда.

Рассмотрим предлагаемое в диссертационной работе решение. При исследовании каждая апробация моделей был ограничена по времени (не более 10 минут на одну итерацию). Всего было проведено 20 запусков каждой модели, результаты по которым приведены в таблице 7 ( $M_1$  – модель с неявной адаптацией коэффициента ( $k$ );  $M_2$  – модель с “явной” адаптацией коэффициента ( $k$ )). На рисунке 13 представлен результат наилучшего из «пусков» моделей с достижением барьера в 31 °С (14-й и 19-й запуски соответственно).

Таблица 7 – Результаты сравнения “явной” и неявной адаптации для параметров  $k_1$  и  $k_2$

Критерии	$M_1$	$M_2$
Минимальная достигнутая ошибка	21 °С	25 °С
Наименьшее количество итераций до «барьера» в 31 °С	14 итерации	29 итерации
Среднее количество итераций до «барьера» в 31 °С	25 итерации	40 итерации
Итерация коррекции, на которой достигается минимальная ошибка	690 итерация	1148 итерация

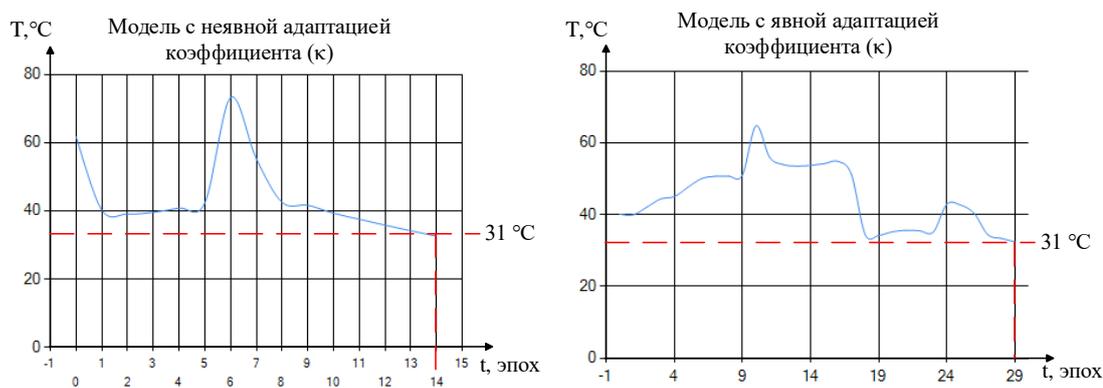


Рис. 13– Пример наиболее быстрых пусков моделей

Характерные «выбросы» на графиках происходят в моменты, когда модель пытается выбраться из области неустойчивости, применяя неоднократно упомянутое алгоритмическое решение “new(•)”.

В результате экспериментов установлено, что процесс неявной адаптации к условиям теплообмена на границе не только возможен, но и позволяет получить более точную модель (выгода порядка 13,8%). Модель с неявной адаптацией к коэффициенту теплообмена в среднем на 37.5 % более быстрая, чем модель с “явной” адаптацией, если брать во внимание точку остановки в 31 °С, и на 39.9 % - если анализировать достижимость минимальной ошибки.

Важно упомянуть, что внесенные изменения в предлагаемый численный метод сразу же учитывают ограничения устойчивости, в том числе алгоритмическое решение, предложенное в п.3.3. Это позволяет предположить, что описанная выше математическая модель, дополняющая этот численный метод, не нарушает устойчивости, и расчеты в п.3.3 являются адекватными даже при учете этой модификации. Добавление корректоров и параметров никаким образом не сказывается на классе сложности модели. Количество настраиваемых параметров влияет лишь на коэффициентную часть уравнения сложности. Таким образом, даже при условии сделанных дополнений в модель, она по-прежнему относится к классу эффективных.

### 3.5 Выводы по главе

Представленная в данной главе модель нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией к теплофизическим параметрам твердого тела и условиям теплообмена на его границе позволяет избежать

необходимости применения внешних моделей “явной” адаптации. Вместо этого был предложен численный метод, позволяющий восстановить искомые теплофизические зависимости и условия теплообмена из статистических данных, описывающих тот или иной нестационарный тепловой процесс.

Данный метод базируется на модификациях конечно-разностного метода моделирования нестационарной теплопроводности и метода стохастического градиентного спуска. Он позволяет решить проблему универсальности классической численной сеточной модели, определяя механизмы неявной адаптации к любому тепловому нестационарному процессу, для которого имеется достаточно статистических сведений.

Проведенный анализ алгоритмической сложности и устойчивости показывает, что предлагаемый численный метод обладает меньшей алгоритмической сложностью, чем классический численный метод в ситуации групповой “явной” адаптации и аналогичной сложностью, когда речь идет об единичной “явной” адаптации внешними моделями. Предложенные в данной главе ограничения модифицированной модели и её численного метода решения позволяют говорить, что в отдельных точках её устойчивость гарантируется доказанной устойчивостью классического численного решения.

Предложенная в данной главе модель и численный метод могут быть применены для неявной адаптации как по поверхности твердого тела, так и по его сечению. Основным ограничением здесь является лишь количество эталонных наблюдений (и расположение точек, где производятся замеры – на поверхности, или внутри), полученных в результате натурального эксперимента.

Данную модель не стоит рассматривать как полное решение проблемы “явной” адаптации, а стоит воспринимать, как альтернативу, для применения которой потребуется большое количество статистических сведений. Задача оптимизации, лежащая в ее основе, многоэкстремальна и может быть решена только относительно некоторого критерия качества, который предлагается устанавливать индивидуально для каждого частного случая применения представленной модели.

## Глава 4 Разработка программных комплексов. Численные эксперименты сравнения моделей

### 4.1 Частный случай применения математических моделей нестационарной теплопроводности

Для проведения сравнительных экспериментов над двумерной моделью нестационарной теплопроводности потребуется представить её в частном виде для определенных граничных условий. Пусть имеет место двумерная задача нестационарной теплопроводности в следующей постановке, определенной для твердого тела прямоугольной геометрии:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa_1(T_1 - T_{06}) + \varepsilon\sigma(T_1^4 - T_{06}^4); \\ x = L: \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_1, t > 0; \\ y = 0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = q_2, t > 0; \\ y = H: \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa_2(T_2 - T_{06}) + \varepsilon\sigma(T_2^4 - T_{06}^4). \end{array} \right. \quad (131)$$

Геометрическая постановка этой задачи будет иметь следующий вид (рис.14) с известными начальными условиями:  $t=0: T=T_0, 0 \leq x < L, 0 \leq y < H$ .

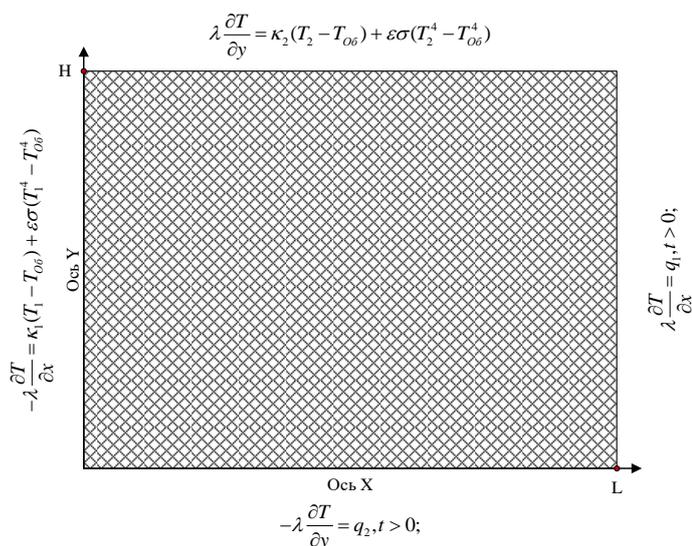


Рис. 14 – Геометрическая постановка задачи в частном случае

Покроем область 14 равномерными ортогональными сетями таким образом, чтобы получить маршевую задачу расчета температуры в узлах сети по  $Ox$  и  $Oy$  (рис.15).

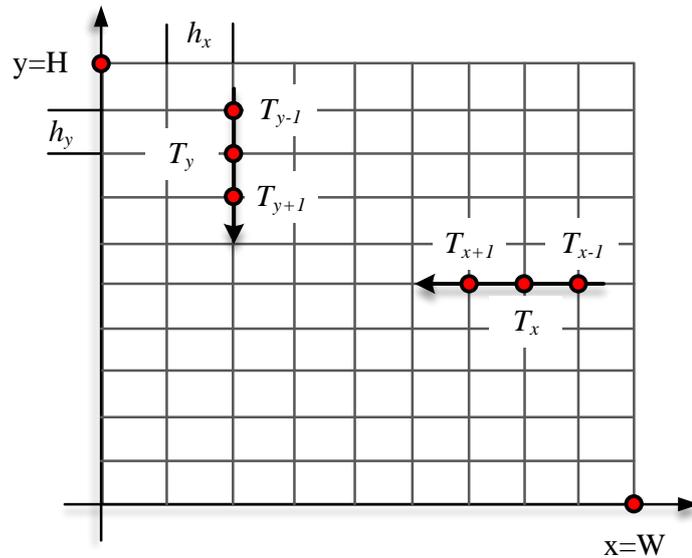


Рис. 15 – Дискретизация двумерной геометрии равномерными сетями

Такая постановка характерна для моделирования температуры нагрева стальных заготовок, распространенного в металлургии и машиностроении. Рассмотрим её часть, предполагая, что интересующие нас точки расположены только на границе твердого тела (рис.16). Данное предположение является технологически обусловленным ограничением модели, вызванным тем фактом, что для нужд управления и слежения за нормальным режимом процесса нагрева стальных заготовок применяют пирометры, которые могут достоверно измерять только температуру поверхности твердого тела.

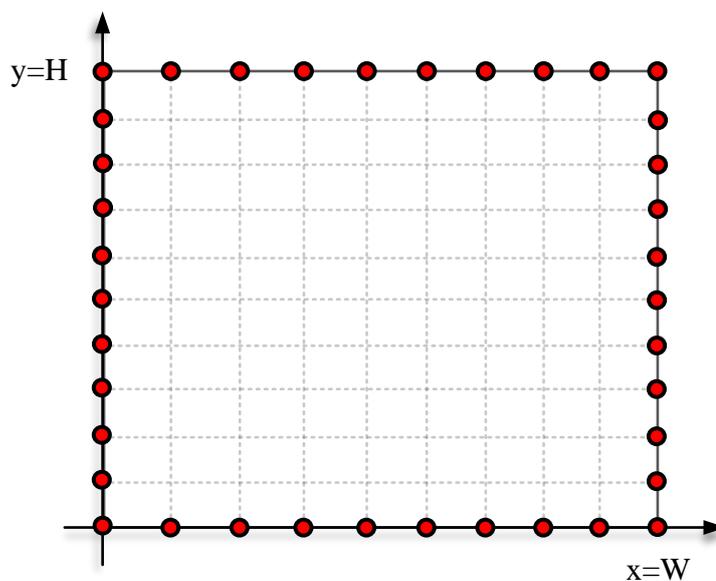


Рис. 16 – Конкретизация задачи

В такой постановке задача нестационарной теплопроводности, в частности, актуальна для прокатного производства, где стальные заготовки нагреваются перед обработкой давлением. Нагрев таких заготовок происходит, как правило, в многозонных проходных печах (рис.17).

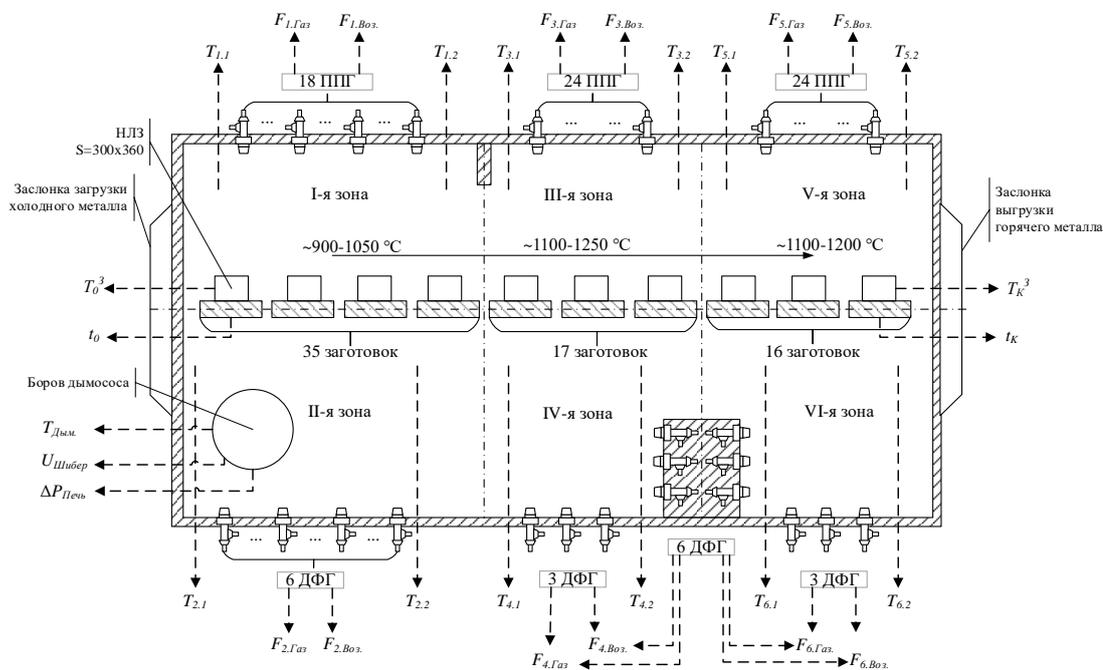


Рис. 17 – Схема многозонной проходной печи (6 регулируемых зон)

Нагрев в такой печи является крайне энергоемким процессом, для которого характерны проблемы повышения энергоэффективности. Наиболее популярным способом решения проблемы повышения энергоэффективности является применение оптимизирующих надсистем (рис.18), где нередко центральным звеном как раз выступает модель нестационарного нагрева. Предполагается, что эта модель может работать быстрее режима реального времени и тем самым прогнозировать температуру поверхности стального твердого тела еще до того, как процесс нагрева завершится.

Такие оптимизирующие надсистемы предполагают, что действующие технологические тепловые агрегаты генерируют большое количество адекватной тепловому процессу статистики и накапливают её в автоматизированных системах управления. Набор сведений, сохраняемых промышленным тепловым агрегатом (например, выше представленной печью), может варьироваться от одного технологического объекта к другому.

Как правило, такая статистика содержит: 1) время, которое твердое тело провело в тепловом агрегате; 2) температура теплоносителя в тепловом агрегате; 3) температура сечения или, что чаще, поверхности твердого тела, снятая уже после процесса нагрева.

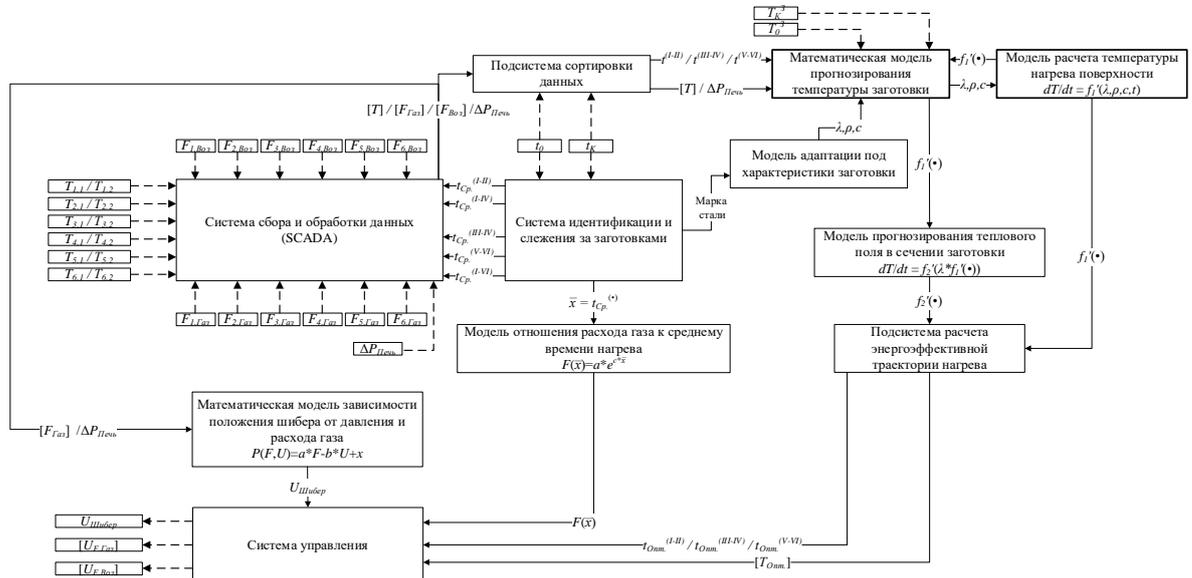


Рис. 18 – Пример оптимизирующей надсистемы с моделью нестационарной теплопроводности в качестве центрального звена

Этот минимальный набор информации можно охарактеризовать как “историю нагрева”, которая, применимо к описанному выше тепловому процессу нагрева стальных заготовок в печах, будет иметь следующую мнемосхему (рис.19).

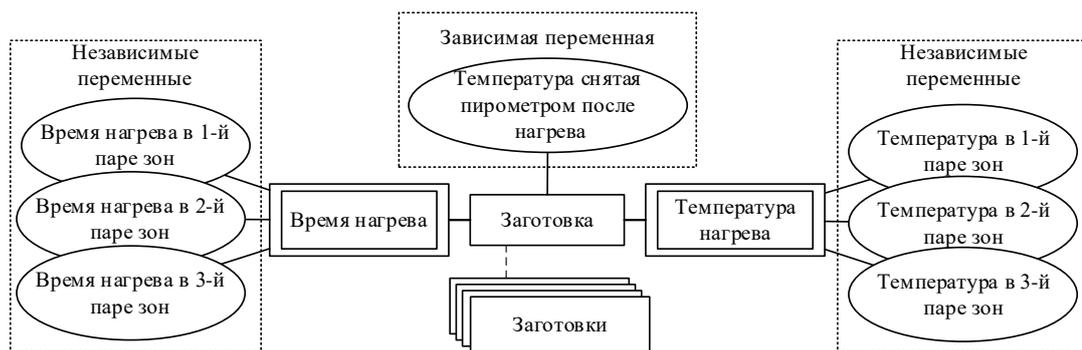


Рис. 19 – Мнемосхема статистических данных, формирующих “историю нагрева”

Отдельные сведения из неё используются для управления технологическим режимом, поэтому можно предполагать их достаточно точными относительно протекающего в печи теплофизического процесса.

Частным случаем производства, для которого было актуально построение математической модели нестационарной теплопроводности, может служить Оскольский электрометаллургический комбинат им. А.А. Угарова. Для проведения дальнейших сравнительных экспериментов данные были получены из прокатного цеха этого комбината для трех различных многозонных печей.

Более детально структура данных для отдельных экспериментов будет рассмотрена далее. Сейчас же важно упомянуть, что для рассматриваемого частного случая с многозонной печью были предложены две структурно разные модели декомпозиции нагрева по “зонам” печи. Во-первых, модель, где весь процесс нестационарного нагрева разбивался на подпроцессы, определенные в зонах со своими условиями теплообмена (рис.20).

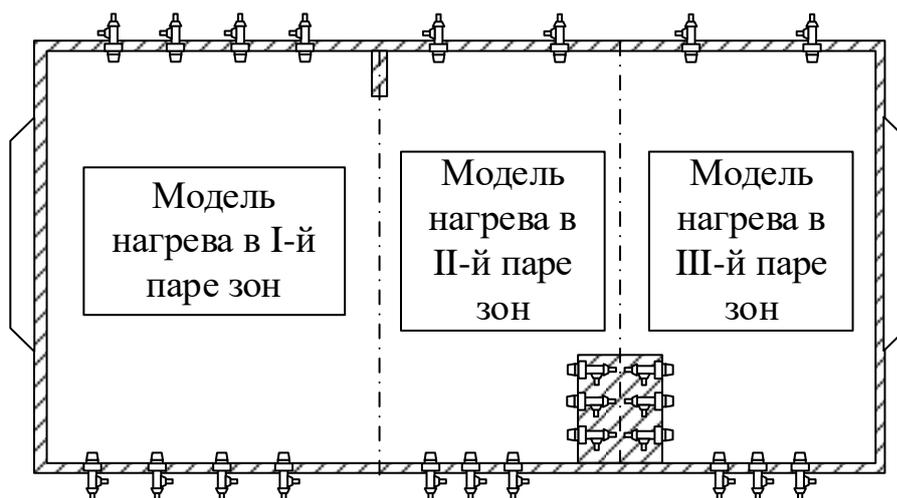


Рис. 20 – Поход к декомпозиции модели нестационарной теплопроводности

Данный подход был обусловлен исключительно технологическими предпосылками. Высокотемпературный нагрев стальных заготовок происходит, как правило, с малым количеством переходных процессов, ввиду чего температуры теплоносителя в зонах меняются слабо. В таком виде выход предыдущей модели задавал начальные условия следующей. Последняя модель в цепочке выдавала результат (рис.21).

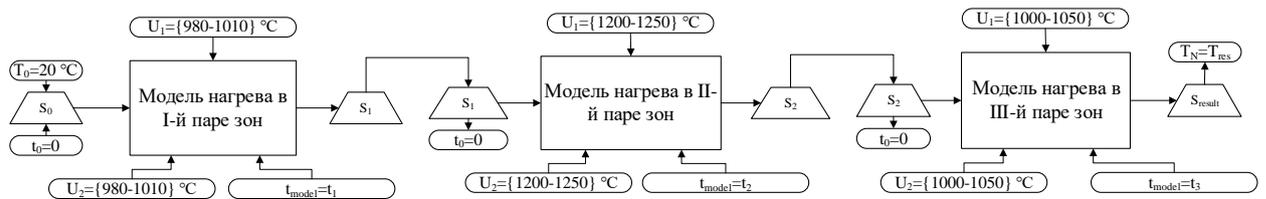


Рис. 21 – Распределение параметров модели

И второй способ задания модели – это некоторые кусочно-постоянные функции для  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$ :

$$U_1(t) = \begin{cases} U_1(t) = f_1^{(1)}(t), 0 < t < t^{(1)} \\ U_1(t) = f_1^{(2)}(t), t^{(1)} < t < t^{(2)}, \\ U_1(t) = f_1^{(3)}(t), t^{(2)} < t < t^{(3)} \end{cases}, \quad (132)$$

$$U_2(t) = \begin{cases} U_2(t) = f_2^{(1)}(t), 0 < t < t^{(1)} \\ U_2(t) = f_2^{(2)}(t), t^{(1)} < t < t^{(2)}, \\ U_2(t) = f_2^{(3)}(t), t^{(2)} < t < t^{(3)} \end{cases}, \quad (133)$$

где  $t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}$  – это время выхода заготовки из первой, второй и третьей пары зон;  $f^{(1)}(t), f^{(2)}(t), f^{(3)}(t)$  – это ступенчатый закон изменения температуры в зонах от времени  $t$ , индекс 1 – для верхних зон; индекс 2 – для нижних.

Рассмотренный выше частный случай является в достаточной мере распространенным ввиду актуальности задач повышения энергоэффективности различных нагревательных печей в металлургии и машиностроении [1-8,19-21,109].

На статистических сведениях для конкретного частного случая были апробированы предложенные в третьей главе данного исследования математическая модель и численный метод нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией. Рассмотрим проведенные эксперименты детальней.

## 4.2 Численные эксперименты апробации предложенной модели неявной адаптации на частном примере

Проблемно-ориентированный комплекс программ, реализующий предлагаемый численный метод неявной адаптации, а также классические

численные методы с отдельными интерфейсами для адаптации “явно” внешними моделями были спроектированы и реализованы на языке С# в виде программ для ЭВМ.

Детально алгоритмы, представленные в этих программах, и их структура будут рассмотрены в п.4.4. Сейчас предлагается рассмотреть апробацию модели, предложенной в третьей главе данной работы, на практическом примере решения некоторой частной задачи описания температуры поверхности твердого тела из стали, нагретого в проходной многозонной печи с пламенным режимом работы.

В качестве исходной статистики для численного метода настройки параметров модели неявной адаптации использовались данные, полученные из действующих систем слежения за металлом в методических печах нагрева металла перед прокатом АО Оскольский электрометаллургический комбинат им. А.А. Угарова. Поскольку рассматривалась шестизонная нагревательная печь, то история нагрева была собрана по зонам. Размер выборки для группы углеродистых сталей, обладающих сходными физико-химическими характеристиками, составил 6098 записей о заготовках, разбитых по следующим признакам:

- время нагрева в первой и второй зонах печи;
- время нагрева в третьей и четвертой зонах печи;
- время нагрева в пятой и шестой зонах печи;
- температуры в первой, третьей и пятой зонах печи;
- температуры во второй, четвертой и шестой зонах печи;
- давление в первой и второй зонах печи;
- давление в третьей и четвертой зонах печи;
- давление в пятой и шестой зонах печи;
- время остывания заготовки при ее движении от выгрузки до точки,

где установлен пирометр, измеряющий результирующую температуру поверхности;

- сама результирующая температура поверхности, снятая пирометром, используемая в качестве эталонного наблюдения.

Исходная выборка была разбита на два подмножества: множество, на основе которого будет выполняться настройка параметров (80% от всех записей); множество для тестирования результатов настройки (20% от всех записей). Обучение модели происходило порциями по 550 итераций настройки. В качестве метрики качества настройки модели выступал параметр абсолютной средней ошибки (43). Использовалась пространственная сеть размерностью  $100 \times 100$  ( $H = 100$ ,  $W = 100$ ) по пространству и  $50 \times 1$  ( $N = 50$ ) по времени. Все параметры сети подобраны экспериментально. Основной целью эксперимента являлась проверка работоспособности предлагаемого решения, а именно возможность модели уменьшать ошибку своего выхода. В качестве результирующей ошибки модели использовалась усредненная температура границ пространственной сети.

Критерием остановки служило замедление градиента ошибки по параметру  $\varphi$ , так как его расчет велся перед расчетом градиента ошибки по параметру  $\omega$ . Степень замедления градиента определялась как разница значений между двумя соседними итерациями коррекции, критическим значением которой служило  $10^{-6}$ . На рисунке 22 представлены 550 итераций коррекции модели, где по оси  $Oy$  отложены значение метрики для тестового множества.

Данные выгружались в Microsoft Excel посредством программного интерфейса (API) и уже в табличном процессоре происходило формирование графика. Первые этапы экспериментов с моделью проходили еще до введения критерия устойчивости и вывода закона коррекции в виде (87).

Как можно заметить, инициализация параметров генератором псевдослучайных положительных чисел привела к базовой ошибке  $45,5$  °C в среднем по всей выборке. За 550 итераций ошибку удалось снизить в среднем на  $2,11$  °C. Предполагается, что подобный результат является следствием

постоянного малого шага коррекции. В результате был проведен полный цикл настройки модели до срабатывания условия остановки (рис. 23).

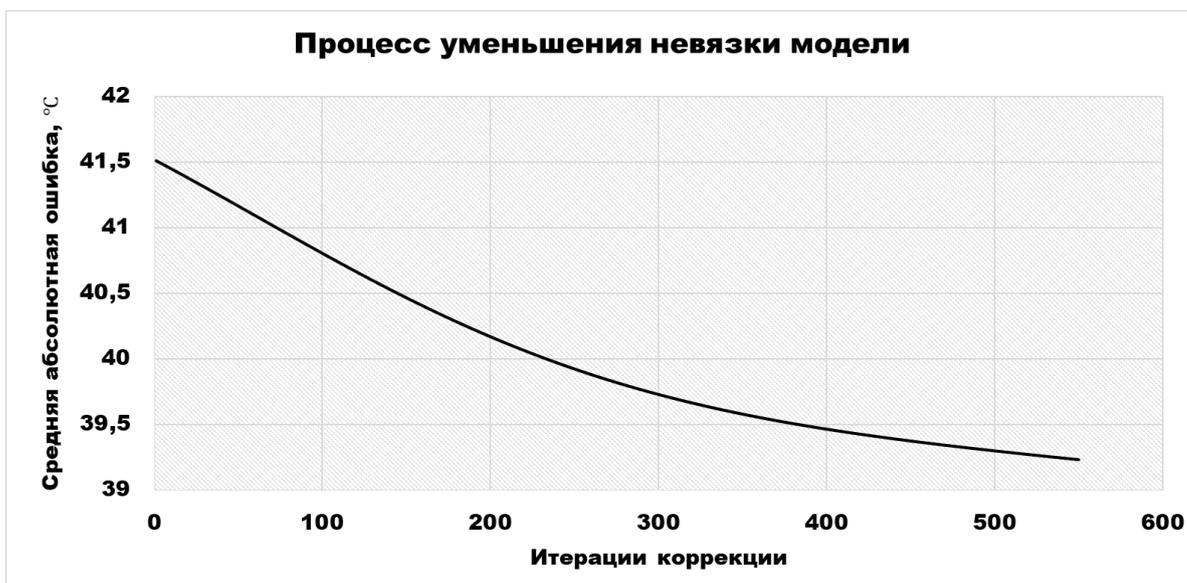


Рис. 22 – Уменьшение абсолютной средней ошибки на первых 550-ти итерациях коррекции

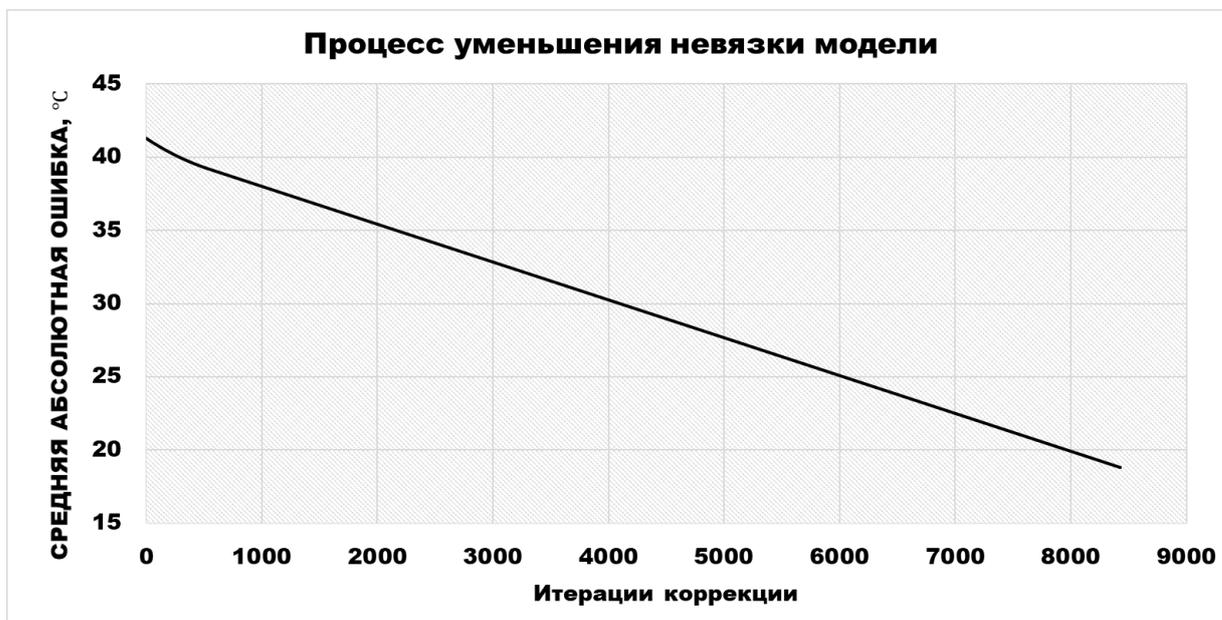


Рис. 23 – Полный цикл уменьшения невязки модели до срабатывания критерия остановки

За полный цикл настройки удалось снизить ошибку на 22,48 °C в среднем по всей тестовой статистике до 18,82 °C по метрике абсолютного среднего, при этом модель не получала в явном виде никакой информации о теплофизических параметрах нагреваемых твердых тел или условий теплообмена на их границах.

Повторив эксперимент с корректором (87), удалось значительно ускорить процесс и уменьшить ошибку до 13,2 °С (рис.24). Для большей наглядности результаты эксперимента были сглажены скользящей средней, чтобы исключить из графиков выбросы, связанные с попытками модели выбраться из локальных областей неустойчивости при помощи решения (120)-(121).

На основании множественных экспериментов апробации модели на рассматриваемом частном случае было установлено, что предложенный численный метод способен обеспечить модели численного решения нестационарной теплопроводности достаточно высокую точность в сравнении с “явно” адаптированными моделями.

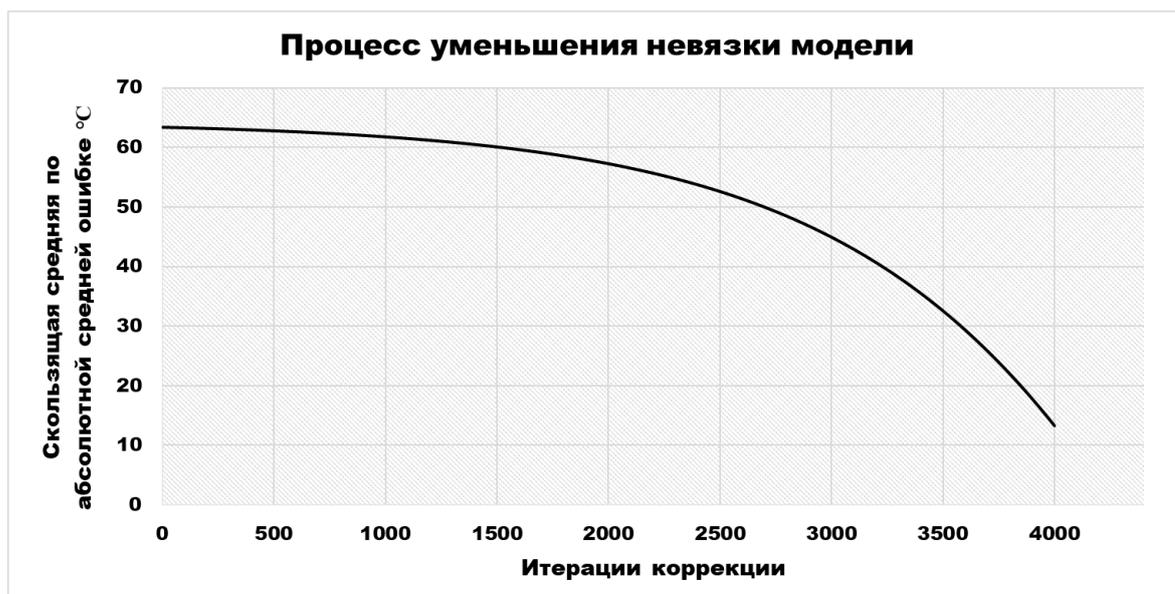


Рис. 24 – Результаты запуска модели с адаптивным шагом настройки (87)

Очевидным здесь будет заметить, что этот численный метод позволяет модели нестационарной теплопроводности адаптироваться под конкретный технологический процесс и тепловой агрегат, на статистике с которого происходит её настройка. Это позволяет обеспечить модели высокую точность без необходимости “явно” описывать динамику изменения теплофизических параметров твердого тела и условий теплообмена на его границе в виде отдельных моделей.

Таким образом подобный предложенный альтернативный неявный подход к проблеме адаптации работоспособен для класса задач описания нестационарного нагрева в многозонных проходных печах при условии, что имеется достаточно репрезентативная статистика.

Необходимо упомянуть, что в процессе решения инженерно-практических задач для представленного выше частного случая нестационарного нагрева были получены некоторые статистические модели, решающие задачу аппроксимации уравнения нестационарной теплопроводности путем построения зависимости между температурой уже нагретого твердого тела и некоторой историей его нагрева. Эти модели упоминались в качестве предпосылок неявной адаптации в п.2.3 данной работы.

Их наличие дало возможность провести численные сравнительные эксперименты, в том числе и для нескольких наборов “историй нагрева” с целью определить эффективность предложенного численного метода и модели неявной адаптации относительно других методов в рамках частного случая нагрева стальных заготовок.

### **4.3 Сравнительные численные эксперименты**

#### **4.3.1 Сравнение классической МКР с моделью DART- «случайного леса»**

На данном этапе исследования для сравнения использовалась сеточная двумерная модель нестационарной теплопроводности, адаптированная строго под одну марку «Сталь 20». Ставилась задача аппроксимировать уравнение нестационарной теплопроводности по статистическим сведениям, которые бы отражали нагрев твердого тела только одного типа материала, и затем сравнить такую модель с моделью “явной” адаптации.

Для этого были собраны 979 заготовок, которые бы строго отвечали одной марке «Сталь 20». Данные были получены с действующей АСУ ТП и не

разу не использовались для построения каких-либо моделей. В таблице 8 представлена часть данной выборки.

Таблица 8 – Пример выборки для исследования

Температурно-временная карта								
№ n/n	$t^{(1)}$ , с	$T_1^{(1)}, T_2^{(1)}$ , °C	$t^{(2)}$ , с	$T_1^{(2)}, T_2^{(2)}$ , °C	$t^{(3)}$ , с	$T_1^{(3)}, T_2^{(3)}$ , °C	$m$ , кг	$t^{(4)}$ , с
1	18053	996	7200	975	6541	1186	4970	225
2	18053	996	7200	975	6727	1186	4980	159
3	18448	996	6949	975	6855	1185	4930	138
4	7387	992	4655	965	4002	1183	9760	140
5	7348	992	4709	966	4034	1182	9680	180
6	7377	992	4671	965	3886	1183	9680	161
7	7405	991	4904	966	3905	1180	9780	153
...	...	...	...	...	...	...	...	...
979	9554	991	5908	972	12798	1190	4910	157

В таблице 8  $t^{(4)}$  – это время движения заготовки до пирометра после выгрузки из печи;  $m$  – параметр, отвечающий за массу заготовки. Для сравнения использовался критерий абсолютного среднего (43) и критерий абсолютного процентного среднего:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \frac{|e_i|}{y_i}. \quad (134)$$

Здесь  $h$  – это горизонт прогнозирования,  $e_i$  – ошибка прогноза на  $i$ -м шаге. Сравнение происходило по замеренным пирометром эталонным значениям температуры поверхности твердого тела. Температуры для сеточной модели снимались и усреднялись по краям пространственной сети. В таблице 9 приведена часть выходов каждой из моделей.

Таблица 9 – Выходы моделей в сравнении с эталоном

Эталонные значения, °C	Выход DART-модель, °C	Выход сеточной модели, °C
1012	1001	1008
1038	1016	1043
1018	1030	1055
1030	1038	1049
1038	1038	1026
1035	1035	1037
1024	1031	1017
1034	1035	1041
...	...	...
1037	1018	1048

Результаты самого сравнения приводятся в таблице 10. Как можно заметить из результатов, модель, построенная на данных в среднем, ошибается на 7.4 градуса Цельсия меньше, чем конечно-разностная модель. Чтобы судить об адекватности данного сравнения необходимо доказать, что полученные прогнозы моделей являются значениями из одной генеральной совокупности.

Таблица 10 – Результаты сравнения

Метрика	DART - модель	Сеточная модель
MAE, °C	9,57	16,9
MAPE, %	0,0094	0,0162

Для этого необходимо было провести формальный тест F-тест [110]. В результате анализа были получены следующие интервальные оценки (табл. 11), на основе которых можно заключить, что для обеих моделей единица попадает в доверительные интервалы.

Таблица 11 – Результат F-теста

Модель	$l_{95}$	$u_{95}$
DART-модель	0,3956223	3,5099546
Конечно-разностная модель	0,1730184	1,5350168

Полученный выше результат можно интерпретировать в пользу адекватности сравнения моделей. Было установлено, что полученные результаты апробации моделей объясняются сильным влиянием процесса адаптации на конечную точность сеточной модели. “Явные” внешние модели адаптации для «Сталь 20» имеют ряд проблем, которые были детально проиллюстрированы в п.2.2.1. В таком случае модель на основе статистических данных выигрывает за счет неявной адаптации к конкретному технологическому объекту и тепловому нестационарному процессу.

Далее было решено сравнить DART-модель “случайного леса” с предложенным в диссертационном исследовании численным методом неявной адаптации конечно-разностной модели нестационарной теплопроводности.

### 4.3.2 Сравнение DART-модели и МКР с неявной адаптацией

Сравнение проводилось на новых данных из действующей АСУ ТП, но имеющих ту же структуру (см. табл. 8). Использовалась DART-модель из предыдущего эксперимента п.4.3.1, и дополнительной настройки для неё не проводилось, поскольку структура вновь собранных данных не изменилась. Дополнительное настройки и для конечно-разностной модели с численным методом неявной адаптации также не проводилось. Использовалась модель, полученная на этапе апробации модели (см. п.4.2).

Предполагалось, что текущий эксперимент позволит определить, насколько удалось перенести эффект неявной адаптации со статистических моделей анализа технологических данных на модель конечных разностей нестационарной теплопроводности.

Для тестирования была выделена выборка из 1218 записей, суммарный объем данных составил 6100 заготовок. Ни одна из моделей не получала сведений о «марках» стали в выборке заготовок. Настраиваемая выборка (4882 заготовки) в данном тесте не учувствовала. Результаты сравнения представлены на рисунке 25. Более формальный аналитический тест проводился при помощи двух метрик: 1) MAE (Абсолютная средняя ошибка (43)); 2) MAPE (Абсолютная средняя процентная ошибка (134)).

Результаты формального теста приведены в таблице 12.

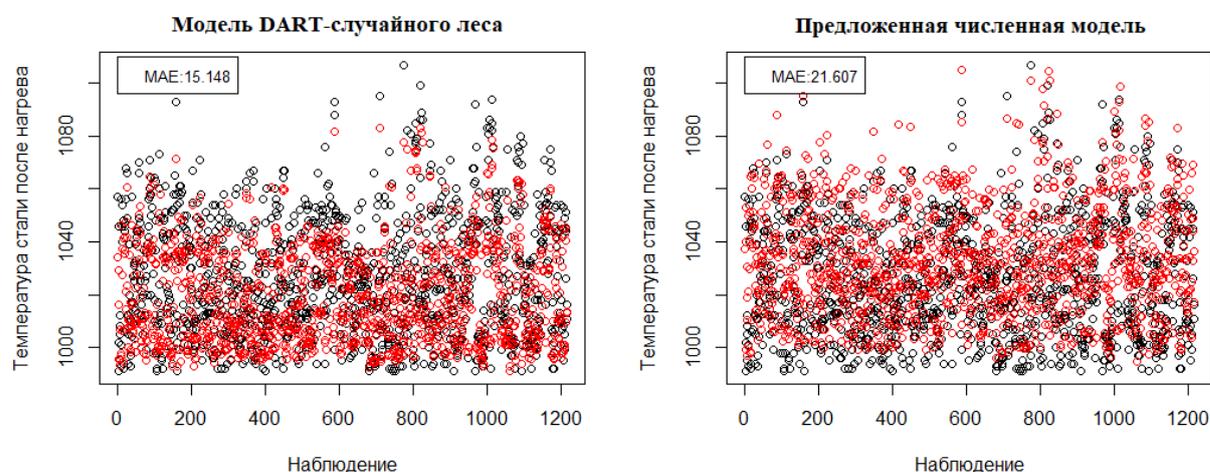


Рис. 25– Результаты сравнения моделей на новых данных без обучения

Как можно заметить, на новых данных DART-модель показала ошибку даже лучше, чем на предыдущих сведениях, полученных из действующей АСУ ТП. При этом конечно-разностная модель с неявной адаптацией показала результат чуть хуже. Наименьшая ошибка по MAE для такой модели составляла 13,2 °С (см. рис. 24) против 21.6°С в данном эксперименте.

Таблица 12 – Формальные результаты сравнения двух моделей

Модель	Значения	
	MAPE, %	MAE, °С
DART-модель	0,02293965	15,148
Модель с неявной адаптацией	0,02330513	21,607

Градиентный бустинг «леса DART-деревьев» является моделью с сильной обобщающей способностью и хорошей устойчивостью. В “предобученном” состоянии ошибка прогнозирования DART-моделью в диапазоне [900 – 1150] °С составила 6,06% от интервала. При этом сеточная модель с неявной адаптацией проигрывает в прогнозировании всего 2,58% и её точность составляет 8,64% от того же прогнозируемого интервала.

Аналогичным образом необходимо сравнивать дисперсии двух наборов полученных результатов прогонок моделей (табл.13), проверив гипотезу о принадлежности их к одной генеральной совокупности.

Таблица 13 – Результаты сравнения дисперсий

Дисперсионный тест	195	u95	F-критерий
Прогноз DART-модели	0,5852834	0,7328436	0,6549208
Прогноз модели с неявной адаптацией	0,5909437	0,7399310	0,6612545
Прогноз DART-модели к модели с неявной адаптации	0,8851106	1,1082626	0,9904216

Как можно заметить, дисперсии двух результатов прогноза практически равны друг другу, однако при соотнесении результатов прогноза с тестируемыми данными можно заметить, что гипотеза о полном равенстве дисперсий не подтверждается.

Предполагалось, что отсутствие равенства дисперсий по формальному признаку может быть следствием того, что модели дополнительно никак не настраивались на новые данные.

Воспользовавшись отдельной настроечной выборкой в 4882 заготовки, был проведен тест при условии дополнительной коррекции параметров двух рассматриваемых моделей с помощью такой выборки. Результат теста представлен на рисунке 26.

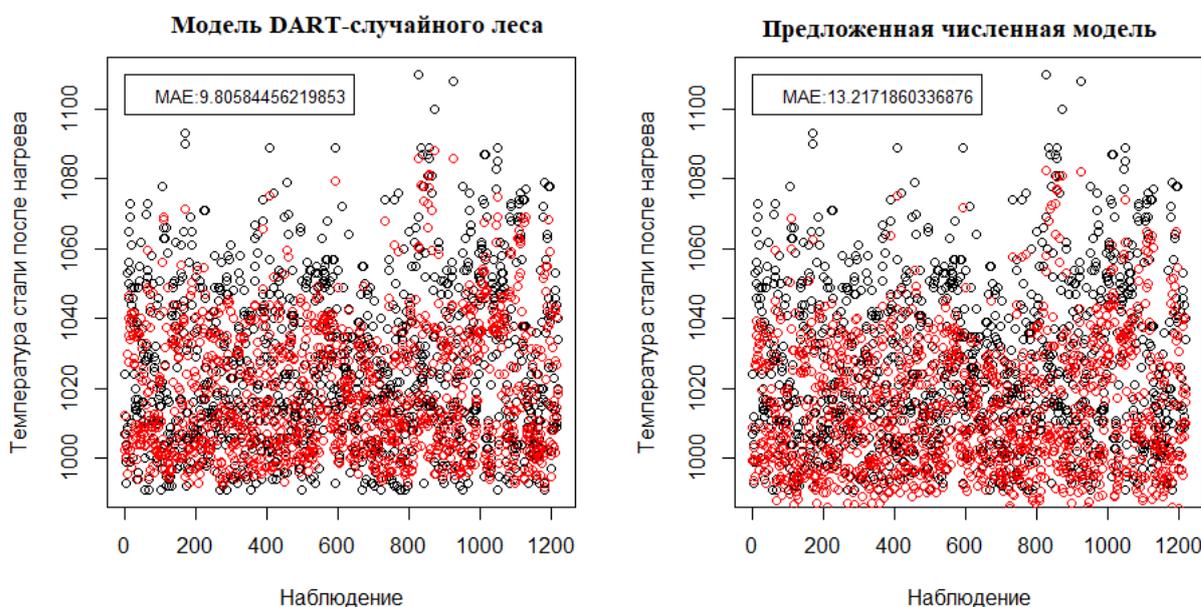


Рис. 26– Результаты сравнения двух моделей после процедур дополнительной коррекции

Формальный тест приведен в таблице 14. Как можно заметить, ошибка на тестовой статистике для DART-модели стремится к 9 градусам Цельсия, что является очень качественным прогнозом нагрева поверхности твердого тела, в данном случае, из стали. Модель на основании численного метода неявной адаптации показала результат близкий к своему стабильному для рассматриваемого частного случая (13,2 °C).

Таблица 14 – Формальные результаты повторного сравнения моделей

Модель	Значения	
	MAPE, %	MAE, °C
DART-модель	0,009477001	9,805
Модель с неявной адаптации	0,01277074	13,217

После процедур дополнительной коррекции, ошибка аппроксимации DART-модели в диапазоне [900 – 1150] °C составила 3,93% от интервала. При этом сеточная модель с численным методом неявной адаптации проигрывает в точности всего 1,36% и демонстрирует ошибку в 5,28% от того же целевого

интервала температур. Формальный тест на равенство дисперсий (табл.15) показал, что критические значения Фишера стали ближе к 1.

Таблица 15 – Результаты формального теста на равенство дисперсий

Дисперсионный тест	195	u95	F-критерий
Прогноз DART-модели	0,5852834	0,9996126	0,8954543
Прогноз модели с неявной адаптацией	0,5909437	0,9373102	0,8812545
Прогноз DART-модели к модели с неявной адаптации	0,8851106	1,0976293	0,980919

На данном этапе было сделано предположение о смещенных оценках из-за большой величины степени свободы анализируемых выборок. Тот факт, что критические значения стали ближе к единице, может свидетельствовать об адекватности замеченной положительной динамики в качестве моделей.

Наконец, было решено сравнить две модели нестационарной теплопроводности напрямую. Рассмотрим данный эксперимент детальней.

### 4.3.3 Сравнение сеточных моделей с “явной” и неявной адаптацией

Для проведения сравнения воспользуемся данными из предыдущего эксперимента. В качестве сеточной модели с неявной адаптацией воспользуемся моделью, полученной в конце предыдущего эксперимента.

В качестве сеточной модели с “явной” адаптацией воспользуемся моделью (12)-(36) с групповой адаптацией к теплофизическим характеристикам нагреваемого тела в “явном” виде при помощи следующих функций:

$$f_{\rho}(T) = 7866 - 0.29 \cdot T - 2.7 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 - 3.4 \cdot 10^{-7} \cdot T^3 + 4.2 \cdot 10^{-10} \cdot T^4, \quad (135)$$

$$f_{\lambda}(T) = 90.2 - 0.142 \cdot T + 8.33 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 - 5.03 \cdot 10^{-9} \cdot T^3, \quad (136)$$

$$f_c(T) = 489 - 0.078 \cdot T + 6.72 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 - 3.97 \cdot 10^{-7} \cdot T^3, \quad (137)$$

где регрессионное уравнение (135) выполняет адаптацию модели к плотности углеродистых сталей; регрессионное уравнение (136) выполняет адаптацию

модели к теплопроводности углеродистых сталей; регрессионное уравнение (137) выполняет адаптацию модели к теплоемкости углеродистых сталей.

Для оценки качества усреднения полиномиальными регрессиями были проведены эксперименты. При помощи обобщенных уравнений были аппроксимированы наборы данных для отдельных «марок» сталей. На рисунке 27 представлен пример аппроксимации плотности отдельных марок уравнением (38).

“Явная” адаптация конечно-разностной модели к условиям теплообмена происходила при помощи математической модели (45)-(50).

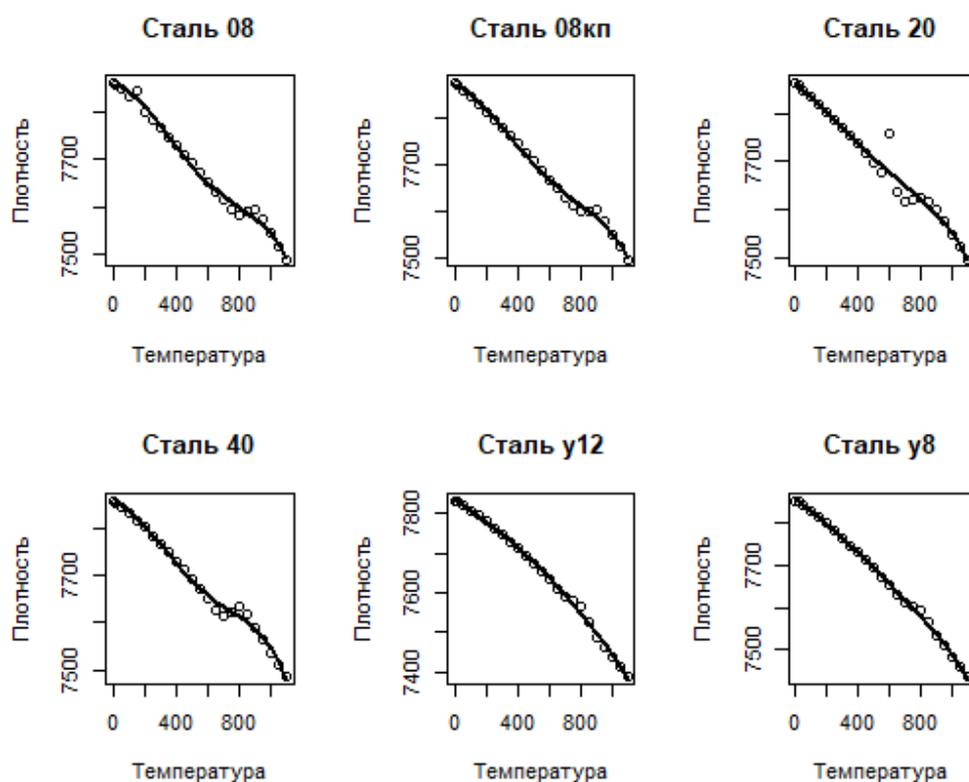


Рис. 27 – Регрессионные уравнения для отдельных марок стали (пустые круги – табличные значения; линия – аппроксимация регрессионным уравнением)

На рисунке 28 приведен график сравнения качества прогноза на тестовой статистике. Как можно заметить, облако спрогнозированных моделями точек у модели с “явной” адаптацией более рассеяно, чем у сеточной модели с неявной адаптацией.

Это может свидетельствовать в пользу уже упоминавшейся ранее во второй главе данной работы проблемы накопления ошибки при групповой

адаптации. При этом формальные тесты показали (табл.16), что модель с неявной адаптацией на 40% лучше, чем сеточная модель с групповой адаптацией только к углеродистым «маркам» сталей.

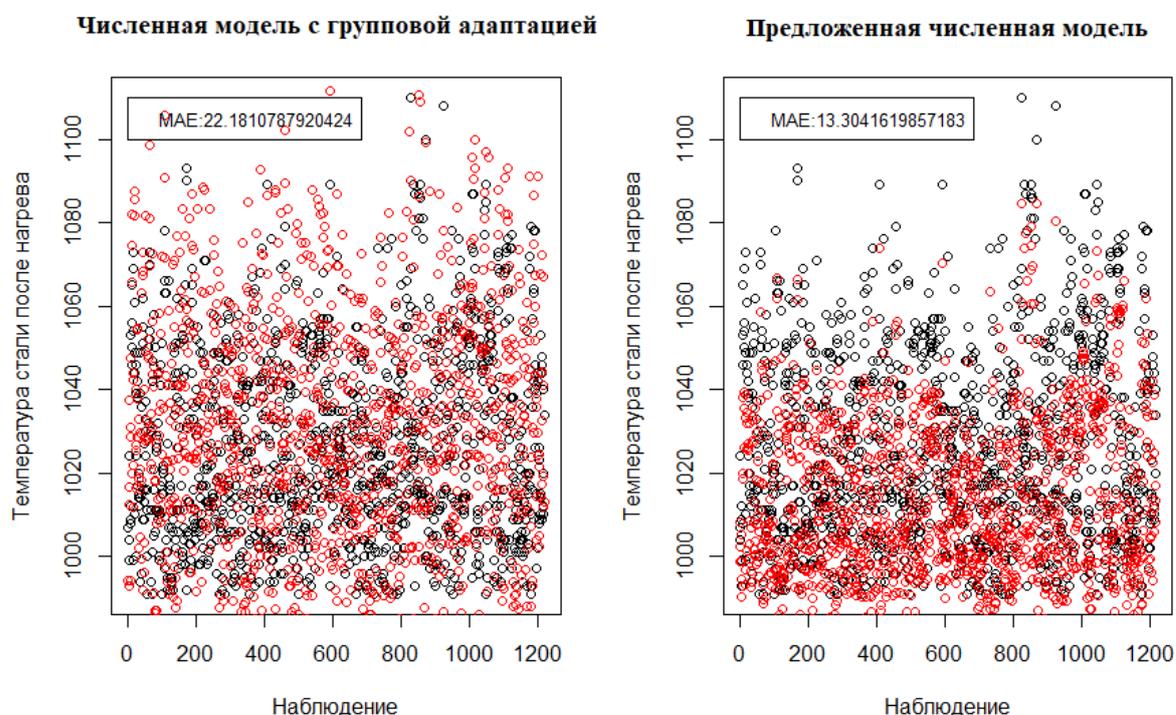


Рис. 28 – Результаты сравнения сеточных моделей с “явной” и неявной адаптацией

Таблица 16 – Сравнения моделей с “явной” и неявной адаптацией

Модель	Значения	
	MAPE, %	MAE, °C
Модель с “явной” адаптацией	0,02161638	22,18
Модель с неявной адаптацией	0,01285599	13,304

Изменим соотношение тестовой и настроечной статистики тестовая – 2438 / 40% и настроечная – 3660 / 60%) и повторим эксперимент. В результате были получены следующие графики (рис.29). Как можно заметить, ошибка сеточной модели групповой адаптации выросла на 30,5% относительно предыдущего эксперимента.

Формальный тест (табл.17) позволяет предположить, что групповая адаптация подобными моделями (135)-(137) выполняется слишком грубо. Получаемый выход “явно” адаптированной численной модели

нестационарной теплопроводности для данного частного случая можно считать крайне неустойчивым. Нельзя однозначно сказать, как поведет себя ошибка при получении новых технологических данных.

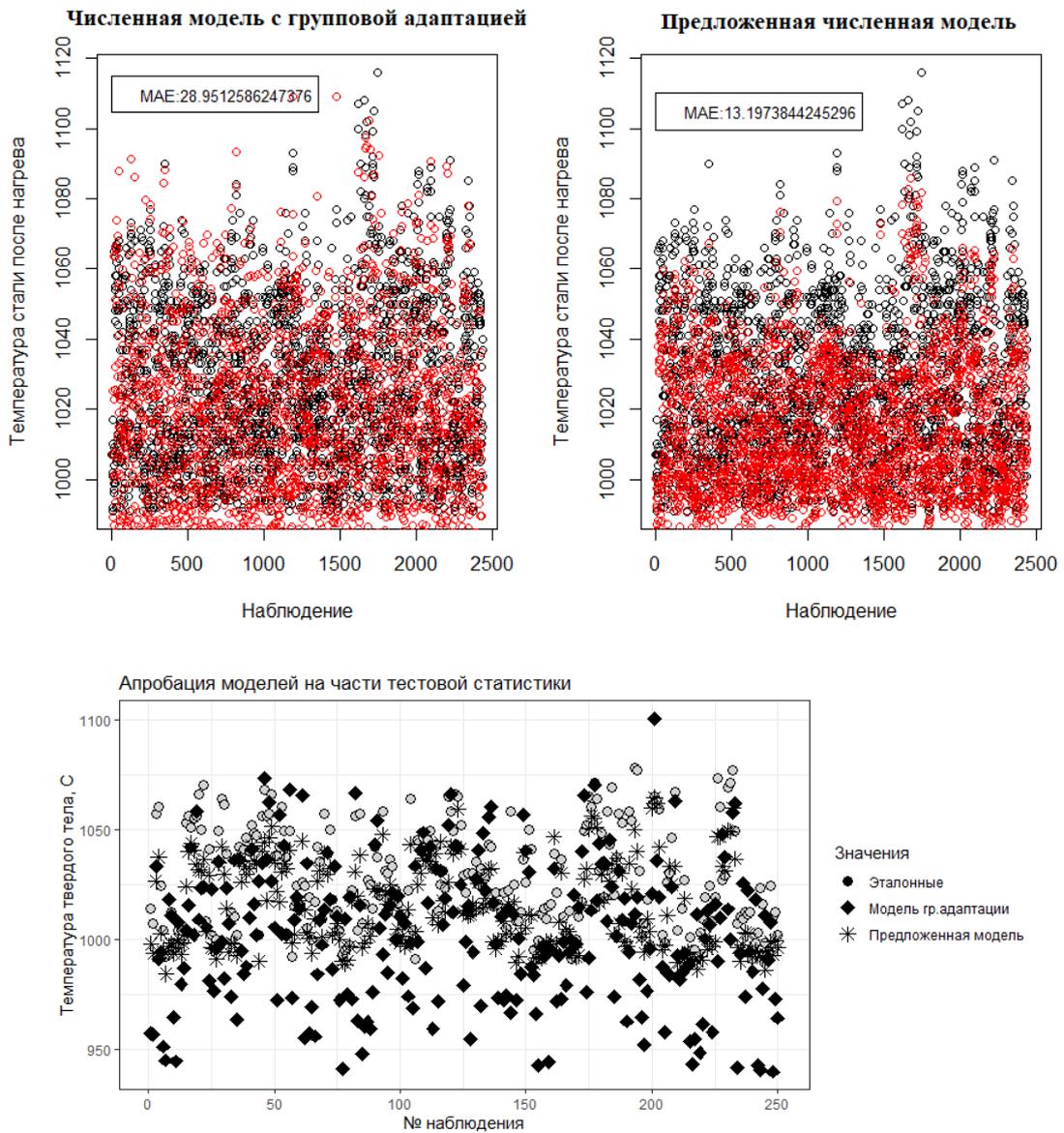


Рис. 29 – Повторное сравнение сеточных моделей при разбиении данных 60% перцентилем

Таблица 17 – Сравнение моделей при 60% разбиении данных

Модель	Значения	
	MAPE, %	MAE, °C
Модель с “явной” адаптацией	0,025814611	28,95
Модель с неявной адаптацией	0,0127522	13,197

Приводя полученную ошибку к некоторому необходимому интервалу прогноза [900;1150] градусов Цельсия, получим, что сеточная модель групповой адаптации ошибается на 11,58% от данного интервала, в то время как сеточная модель с неявной адаптацией ошибается на 5,28%, что на 6.3% более точный прогноз. Формальный тест на равенство дисперсий показал аналогичные результаты, что и в предыдущих экспериментах. Отдельные эксперименты в рамках данной главы были проанализированы более детально и соотнесены друг с другом.

#### **4.3.4 Анализ результатов сравнения моделей**

Классическая сеточная модель в ситуации групповой “явной” адаптации проигрывает статистической модели (в данном случае DART-случайному лесу). Однако как показали эксперименты в п.4.3.1 для ситуаций единичной “явной” адаптации конечно-разностная модель показывает приемлемый результат с ошибкой в 16,9 градусов Цельсия.

При этом сеточная модель групповой адаптации проигрывает порядка 43,3% точности DART-модели, которая не получала никаких сведений о теплофизических характеристиках твердого тела или информации об условиях теплообмена на его границах, и была адаптирована неявно к ним. Приводя ошибку к некоторому интересующему нас интервалу в рамках частного примера нагрева стальных заготовок – [900;1150] градусов Цельсия, DART-модель показывает ошибку порядка 3,83 % от данного интервала, в то время как сеточная модель проигрывает 2,93% и ошибается в среднем на 6,76% от интервала.

Сравнение двух сеточных моделей происходило для ситуации групповой “явной” адаптации одной из них. При таком эксперименте результат прогноза “явно” адаптированной модели оказывался неустойчивым, что было проиллюстрировано последним экспериментом в п.4.3.3 (см. табл.16 и табл.17).

Модель с “явной” адаптацией при 80%-м разбиении данных (т.е. тестовая статистика составляла 1218 заготовок) показала себя на 40% хуже, чем модель с неявной адаптацией. На 60%-м разбиении (т.е. тестовая статистика составляла уже 2438 заготовок), модель “явной” адаптации показала себя на 54,4% хуже, чем модель неявной адаптации.

При этом такая модель, неявно адаптированная к теплофизическим параметра твердого тела и условиям теплообмена на его границах, для этих двух экспериментов не показала значительных расхождений в точности.

Сравнение двух неявно адаптированных моделей показало, что статистические инструменты со сложной внутренней структурой, такие как DART-модель “случайного леса”, показывают лучшую точность за счет того, что заменяют решение задачи нестационарной теплопроводности на задачу регрессии и восстановления зависимости выхода по температуре от некоторых входных параметров, называемых историей нагрева. В ситуации, когда обе модели получены на одной и той же «очищенной» и качественной статистике, DART-модель ошибается на 3,92% от исследуемого интервала, когда конечно-разностная модель с численным методом неявной адаптации проигрывает ей всего 1,36% и ошибается на 5,28% от интервала.

При этом DART-модель показывает приблизительно одинаковые результаты, что может свидетельствовать в пользу устойчивости данной структуры. Сравнительная характеристика моделей представлена в таб. 18.

Таблица 18 – Сводная таблица сравнения моделей

	МКР с единичной адаптацией к "Сталь 20"	МКР с групповой адаптацией	DART- "Случайный лес"	МКР с неявной адаптацией
MAE, °C	16,9	28,95	9,805	13,197
MAPE, %	0,0162	0,0258	0,0094	0,0127

В результате, опираясь на проведенные сравнительные тесты, были сделаны следующие выводы (тезисно) относительно частного случая применения модели нестационарной теплопроводности:

1) математическая модель с “явной” групповой адаптацией обладает определенной неустойчивостью, так как адаптирована только к углеродистым

«маркам» сталей по хорошо изученной части группы (не по всем углеродистым «маркам»);

2) математическая модель в ситуации единичной “явной” адаптации показывает хороший устойчивый прогноз. Однако такой метод адаптации неприменим при моделировании нагрева в промышленных действующих тепловых установках нагрева металла различных марок из-за аспектов, детально изложенных в п.2.2.1 данной работы;

3) математическая модель с численным методом неявной адаптации имеет возможность показывать достаточно высокую точность расчета, не получая при этом никаких сведений о теплофизических характеристиках нагреваемых твердых тел и условий теплообмена на их границах;

4) несмотря на то, что в частном случае приложения моделей нестационарной теплопроводности наилучшую точность показали модели аппроксимации одноименного уравнения, а не его численного решения, такие модели обладают совершенно неинтерпретируемой структурой, основанной на конечном виде статистических данных;

5) данный факт не позволяет рассматривать такие модели как универсальные. Их внутренняя структура должна быть индивидуально подобрана под каждый отдельный набор данных с минимальным простором для обобщения;

6) предложенная математическая модель и численный метод неявной адаптации универсальны в том смысле, что их внутренняя структура постоянна для любого приложения модели нестационарной теплопроводности, где в качестве граничных условий рассматриваются условия III-го рода.

Представленная и апробированная в рамках данной главы математическая модель неявной адаптации совмещает в себе преимущество открытой интерпретируемой структуры классической модели нестационарной теплопроводности с элементом неявной адаптации, свойственным

статистическим моделями анализа технологических данных. При этом незначительно проигрывая последним в точности.

Для проведения всех вышеизложенных численных сравнительных экспериментов были разработаны проблемно-ориентированные программные комплексы. Часть из этих программных комплексов предназначена для моделирования частного случая нагрева твердых тел из стали в проходных печах. Однако программный комплекс, реализующий численный метод неявной адаптации, был спроектирован и реализован максимально универсальным. Рассмотрим эти программные комплексы детальней.

#### 4.4 Разработка проблемно-ориентированных программных комплексов

##### 4.4.1 Программа для моделирования нестационарного теплопереноса в шестизонной печи

Для проведения сравнительных экспериментов с классической МКР был разработан программный комплекс, UML-диаграмма классов которого в обобщенном виде представлена на рисунке 30.



Рис. 30 – UML–диаграмма классов программы нестационарного теплопереноса

Имелось три класса: 1) визуализатор, отвечающий за отрисовку экранных форм; 2) математическая модель нагрева, отвечающая за расчет нестационарного теплообмена; 3) методическая печь, класс-контроллер, предназначенный для агрегирования нескольких моделей.

Модель нестационарной теплопроводности представляла собой три отдельные модели, агрегированные в некотором «контроллере» с общим хранилищем промежуточных состояний. Каждая из отдельных моделей в такой концепции работает со своим подмножеством входных данных, выделяемых из общего входа модели. Причем начальное состояние каждой последующей модели зависело от конечного состояния предыдущей.

На базе вышеизложенной концепции была получена первая версия [40] программного комплекса (рис.31). Все программные комплексы здесь и далее были разработаны на языке C# в интегрированной среде разработки (IDE) Visual Studio.

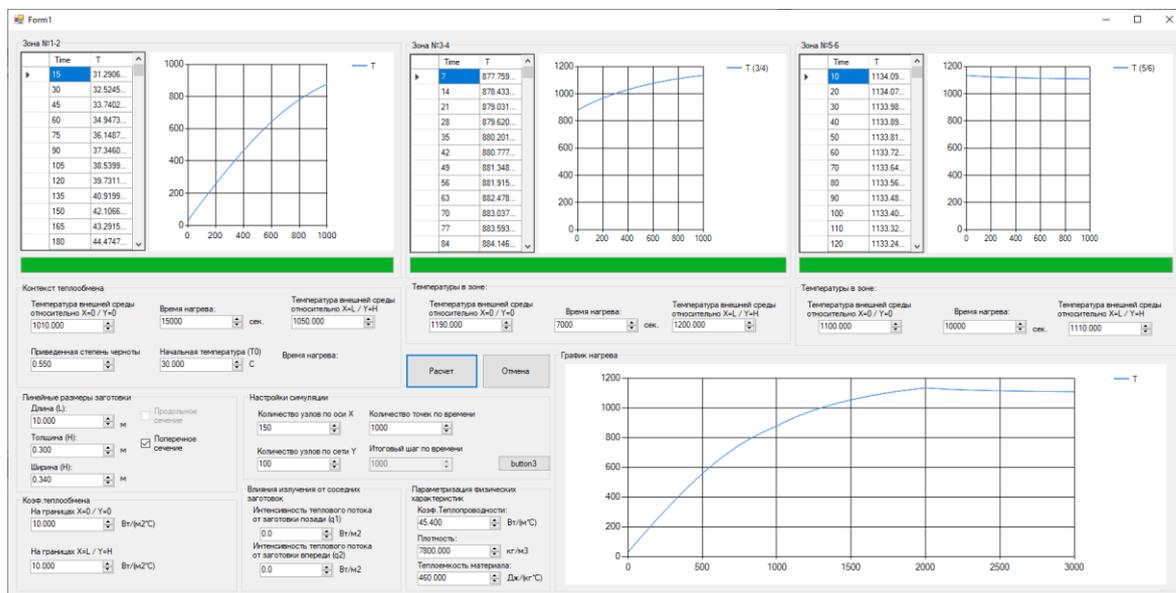


Рис. 31 – Внешний вид программной среды для моделирования нестационарного теплопереноса в шестизонной печи

Затем в этот комплекс была внедрена модель охлаждения (путем решения задачи конвективного теплообмена на основании граничных условий). В результате была получена дополненная версия программного комплекса (рис.32), на которую было получено свидетельство о регистрации [41].

В ядре данной программы находится линейный алгоритм, представленный в приложении А на рисунке А.1. Все алгоритмы, изложенные далее, выполнены в нотации ДРАКОН [111]. Центральным элементом является подпрограмма прямого решения задачи нестационарной

теплопроводности. Алгоритм данной подпрограммы представлен в приложении А на рисунке А.2.

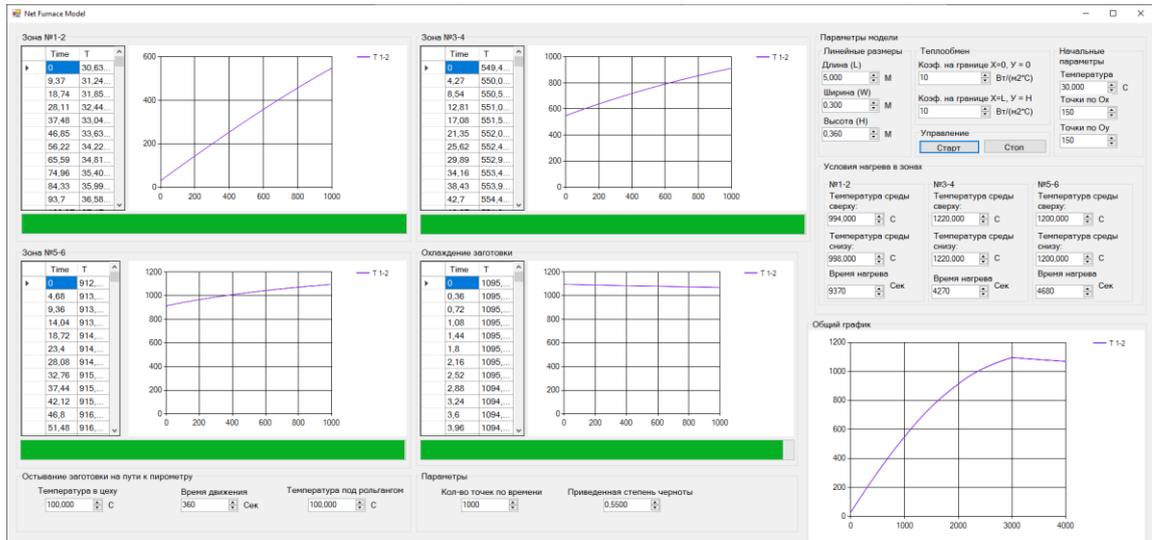


Рис. 32 – Внешний вид программной среды для моделирования температуры

#### 4.4.2 Программа расчета температурного поля в прямоугольном сечении с адаптивным коэффициентом теплообмена

Модель расчета температурного поля в прямоугольном сечении с адаптивным коэффициентом теплообмена представляет собой доработку программного комплекса моделирования нестационарной теплопроводности. Внешне программа не претерпела изменений, однако во внутреннюю структуру был внесен алгоритм “явной” адаптации не только к теплофизическим параметрам моделируемого твердого тела, но и модель адаптации (45)-(50) к условиям теплообмена на границе через расчет числа Нуссельта (см. приложение А, рис.А.3). Сам алгоритм “явной” адаптации к условиям нагрева приведен в приложении А на рисунке А.4.

Перед фактическим расчетом коэффициентов теплообмена происходит вычисление теплопроводности газо-воздушной смеси теплоносителя по восстановленному регрессионному уравнению:

$$\begin{cases} \lambda_{\text{Право}}^B = -3.77 \cdot 10^{-8} \cdot T_1^2 + 7.5 \cdot 10^{-5} \cdot T_1 + 0.024, \\ \lambda_{\text{Верх}}^B = -3.77 \cdot 10^{-8} \cdot T_2^2 + 7.5 \cdot 10^{-5} \cdot T_2 + 0.024. \end{cases} \quad (138)$$

В конце алгоритма происходит расчет коэффициента теплообмена при помощи уравнения (45) через известное число Нуссельта. Полученные значения сохраняются в общий буфер модели и используются далее в методе прямого расчета. В частности, данный программный комплекс использовался в экспериментах п.4.3.3. Модель с данной модификацией использовалась в четвертой главе при сравнении “явного” и неявного процессов адаптации к условиям нагрева и нагреваемому веществу.

Опишем последний программный комплекс, разработанный на основании предложенного решения в третьей главе и включающий в себя сеточную модель нестационарной теплопроводности, а также численный метод неявной адаптации к теплофизическим параметрам твердого тела и условиям теплообмена на его границе.

#### **4.4.3 Программная среда, реализующая предложенный численный метод неявной адаптации**

В основе данного программного комплекса лежит гексагональная архитектура (или чистая архитектура) [112]. Основная идея применения таких архитектур лежит в максимальной атомизации исходного кода.

Весь программный комплекс (рис. 33) состоит из трех больших уровней:

- 1) уровень пользовательских интерфейсов;
- 2) уровень бизнес-логики;
- 3) уровень доступа к данным.

Здесь представлены следующие классы:

- 1) *DataLoader* – класс, предназначенный для загрузки данных в промежуточный буфер;
- 2) *UserInterface* – класс, предназначенный для связи экранной формы (класс Form) с классом-коннектором и модулем доступа к данным;
- 3) *Connector* – класс, обеспечивающий связь класса-контроллера, отвечающего за наблюдение за моделью и пользовательским интерфейсом. Одной из основных функций данного класса является слежение за

изменениями в хранилище промежуточных данных для визуализации процесса коррекции параметров и настройки модели на экранной форме;

4) *ModelController* – это класс-контроллер, являющийся ядром системы. Он принимает и проверяет на корректность введенные пользователем и переданные через класс-коннектор сведения. Также данный класс следит за нормальным режимом работы модели и «отлавливает» возникающие ошибки. Оболочка процесса коррекции параметров, за счет которого происходит неявная адаптация, включающая проверку критерия остановки, основные метрики качества и др., находится в этом классе;

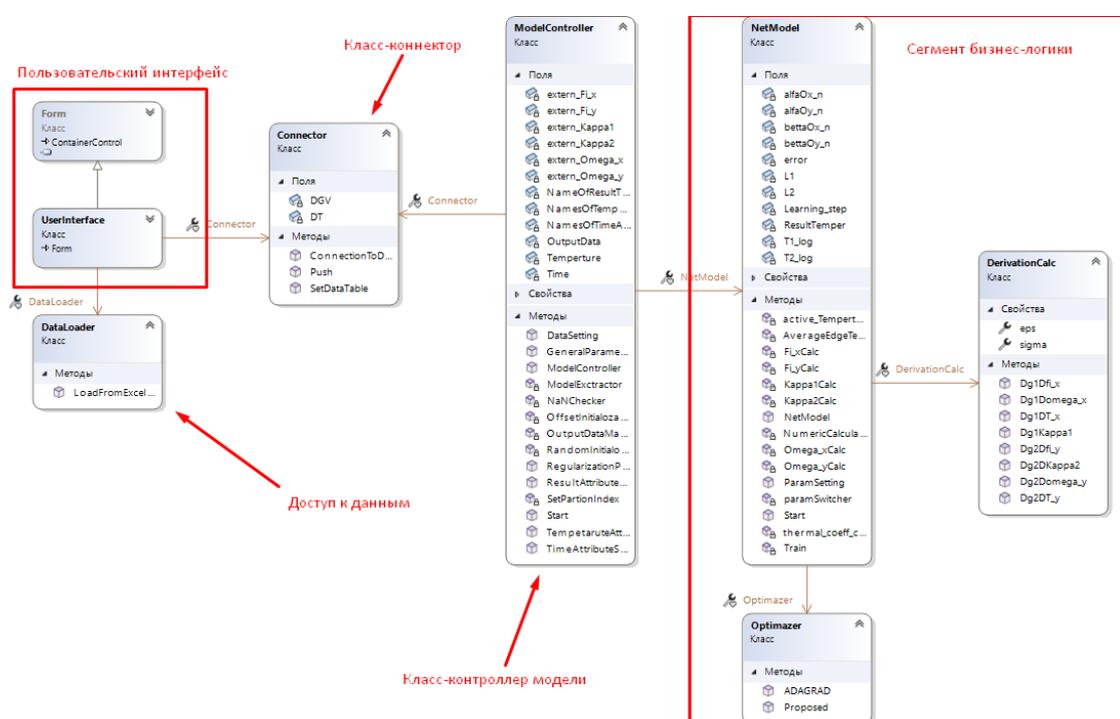


Рис. 33 – UML структура предлагаемого программного комплекса, реализующего численный метод нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией

5) *NetModel* – класс, в котором находится сеточная модель и два механизма (прямого и обратного расчета). В классе представлены методы для коррекции параметров  $\varphi$ ,  $\kappa$  и  $\omega$ ;

6) *Optimizer* – класс, содержащий в себе оптимизаторы для коррекции параметров  $\varphi$ ,  $\kappa$  и  $\omega$ ;

7) *DerivationCalc* – класс, содержащий в себе методы расчета частных производных. Включает сложные многомерные формы расчета,

вынесенные в отдельную динамическую структуру для распараллеливания процесса решения.

Основной алгоритм работы системы представлен в приложении А, рисунок А.5. Подпрограмма решения обратной задачи и коррекции параметров предусматривает распараллеливание вычислительных процессов. Так как частные производные могут быть рассчитаны независимо друг от друга, то была применена техника многопоточной обработки с единым барьером. Алгоритм такой распараллеленной структуры представлен в приложении А на рисунках А.6.1 – А.6.3. Взаимодействие пользователя с моделью начинается с загрузки данных. Для визуализации данного процесса была спроектирована UML-диаграмма последовательности (рис.34).

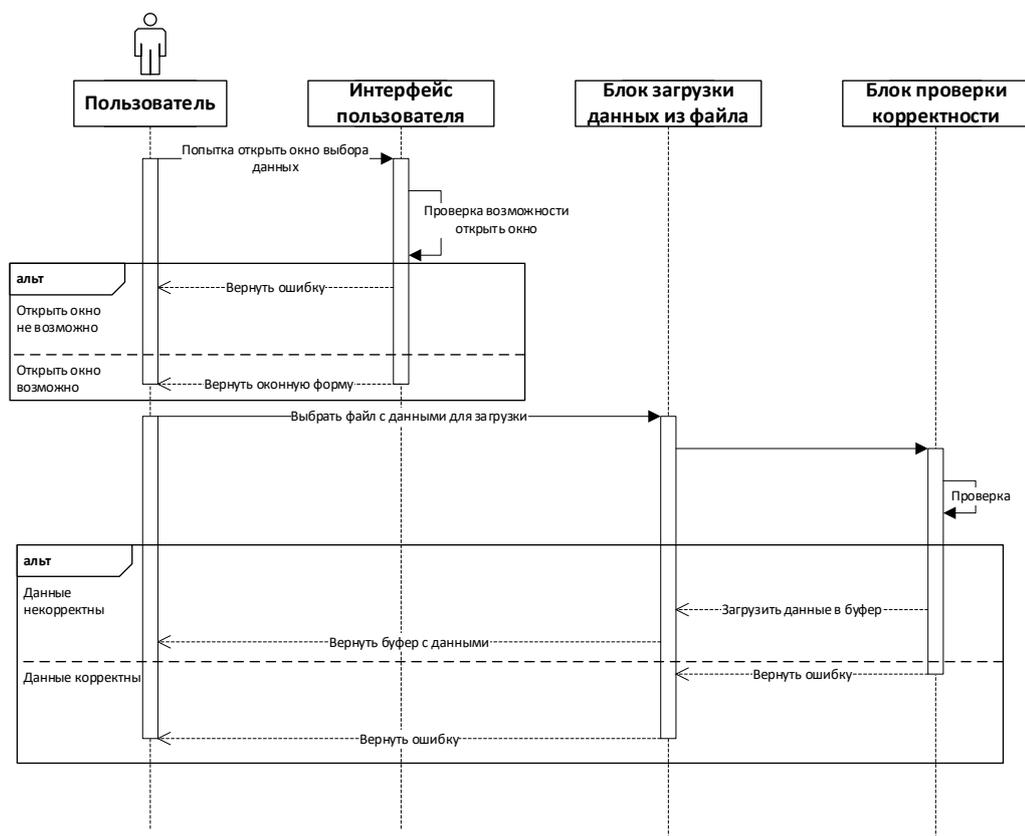


Рис. 34 – UML-диаграмма последовательностей для функционального процесса загрузки данных

После того, как данные были загружены, взаимодействие пользователя с моделью продолжается через интерфейс. Для данного процесса была также разработана диаграмма последовательностей (рис.35).

Все взаимодействия с моделью происходят через контроллер, пользователь лишен возможности напрямую взаимодействовать с сеточной моделью. Такой подход позволяет заменить блок «модель» в любое время, доработав или вовсе убрав из него отдельные функции.

Пользовательский интерфейс полученной таким образом программной среды представлен на рисунке 36. Рассмотренная программная среда позволяет вести настройку сеточной модели, при этом фиксирует её только на данных, а не на структуре теплового агрегата. В настройках модели присутствуют отдельные параметры, отвечающие за количество температурных и временных зон, что теоретически делает её широко применимой.

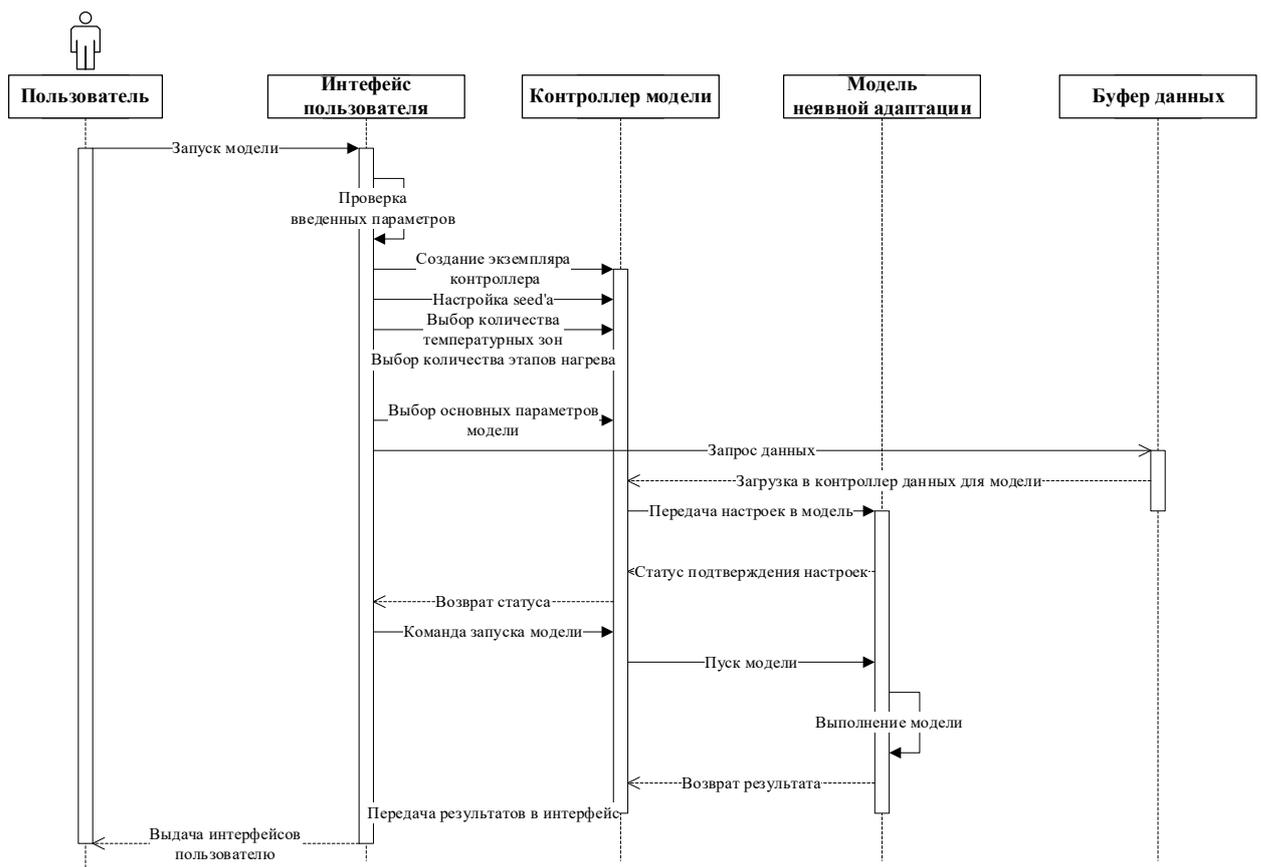


Рис. 35 – Диаграмма последовательностей для процесса взаимодействия пользователя с моделью

Программный комплекс, реализующий численный метод неявной адаптации имеет более широкое применение, чем два других программных

комплекса, представленных ранее. Проблемно-ориентированная программная среда не ограничивается применением модели к частному случаю нагрева твердого тела из стали в проходной печи. Модель поддерживает произвольное задание изменения температуры теплоносителя в зоне и отдельных характеристик нагрева.

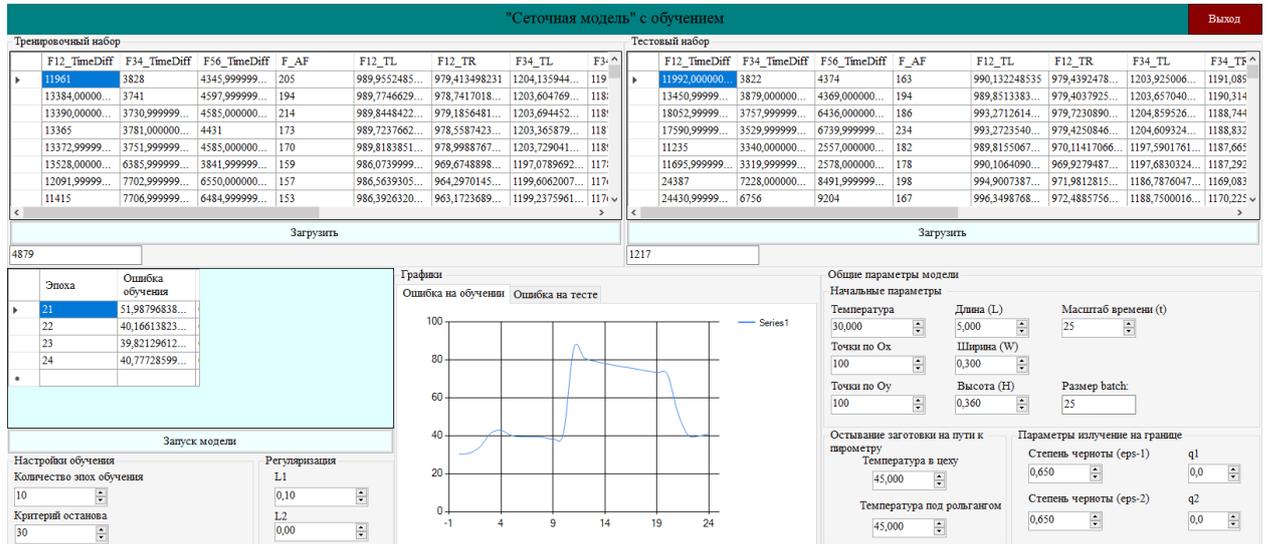


Рис. 36 – Интерфейс программной среды, реализующей численный метод невязной адаптации

Единственным ограничением программного комплекса является применение только ортогональных сетей. При этом геометрия тела может быть любой. В таком случае покрытие сетями задается при помощи конфигурационного файла в виде кусочно-заданной функции (отдельных отрезков).

Оптимизационные практики программирования, использованные в процессе разработки представленного универсального программного комплекса, здесь не приводятся в виду своего объема. Они являются типовыми, однако часть из них впервые была адаптирована под специфику решаемой задачи (под предлагаемый численный метод).

#### 4.5 Выводы по главе

В рамках главы был рассмотрен частный случай нестационарной теплопроводности, заключающийся в моделировании температуры нагрева поверхности стальных твердых тел в проходной многозонной печи, где

теплоносителем выступают продукты горения природного газа (пламенный режим работы). Для представленного частного случая была определена прямоугольная геометрия тела, соответствующая сечению некоторой стальной заготовки, для которой была поставлена краевая задача.

Такого рода частный случай наиболее актуален для металлургии и машиностроения из-за крайней энергоемкости промышленных тепловых агрегатов, нагревающих сталь. Как правило нагрев происходит в многозонных проходных печах, что объясняется непрерывным характером производства.

Для них характерны различные задачи повышения энергоэффективности, которые по ряду причин не могут быть решены на уровне локальных контуров управления. Наиболее перспективным способом решения этой проблемы видится применение оптимизирующих надсистем, основная задача которых обработать статистику о процессе нагрева, спрогнозировать температуры поверхности стальной заготовки быстрее режима реального времени и определенным образом скорректировать траекторию её нагрева. Для прогнозирования температуры нагрева поверхности как раз можно применить решение задачи нестационарной теплопроводности.

На вышеизложенном частном примере была выполнена апробация предложенной численной модели нестационарной теплопроводности с численным методом неявной адаптации к теплофизическим параметрам нагреваемого тела и условиям теплообмена на его границе. Результаты эксперимента можно считать положительными. Модель успешно адаптируется под конкретный тепловой процесс, отраженный в технологических данных, и позволяет получить точность не хуже статистических моделей. Данные выводы были сделаны на основании множественных экспериментов сравнений. В таблицах 19-20 приведены их результаты.

Таблица 19 – Общее сравнение моделей

	МКР с единичной адаптацией к "Сталь 20"	МКР с групповой адаптацией	DART- "Случайный лес"	МКР с неявной адаптацией
Абсолютная средняя ошибка, °С	16,9	28,95	9,805	13,197
Ошибка относительно интервала [30;1150] °С, %	0,015089286	0,025848214	0,008754464	0,011783036
Ошибка относительно интервала [900;1150] °С, %	0,0676	0,1158	0,03922	0,052788

При этом такая модель по-прежнему остается универсальной в классе задач нестационарной теплопроводности, требующих граничных условий III-го рода.

Таблица 20 – Отношение ошибок моделей

	МКР с единичной адаптацией к "Сталь 20"	МКР с групповой адаптацией	DART- "Случайный лес"	МКР с неявной адаптацией
МКР с единичной адаптацией к "Сталь 20"		+12,05 °С	-7,095 °С	-3,703 °С
МКР с групповой адаптацией	-12,05 °С		-19,145 °С	-15,753 °С
DART-"Случайный лес"	+7,095 °С	+19,145 °С		+3,392 °С
МКР с неявной адаптацией	+3,703 °С	+15,753 °С	-3,392 °С	

В завершении данной главы рассматриваются предложенные проблемно-ориентированные программные комплексы. Среди которых был представлен универсальный программный комплекс, в основе которого находится предложенная математическая модель нестационарной теплопроводности с численным методом неявной адаптации.

Данный программный комплекс качественно отличается от имеющихся программ моделирования нестационарной теплопроводности тем, что реализует предложенный численный метод, а также построен с применением чистой «гексагональной» архитектуры и в соответствии с принципами SOLID ООП. Последняя гарантирует, что полученный программный комплекс будет иметь модульную архитектуру, что позволит дорабатывать отдельные компоненты без необходимости полностью переделывать внутреннюю структуру.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе решена научная проблема, связанная с групповой “явной” адаптацией к изменениям теплофизических параметров нагреваемого твердого тела от температуры и условиям аналогичного изменения коэффициента теплообмена на его границах при численном моделировании нестационарного теплопереноса в среде высоких температур. Под групповой “явной” адаптацией понимается восстановление законов изменения теплофизических параметров твердого тела и коэффициента теплообмена на границе для группы схожих материалов при помощи внешних моделей, например, регрессионных.

В процессе были **решены три взаимосвязанные задачи.**

1. Предложена математическая модель нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией, применимая для граничных условий III-го рода, в ситуациях, когда групповая “явная” адаптация ограничена или невозможна из-за роста алгоритмической сложности или снижения точности.

2. Для предложенной модели был получен численный метод на основе модификации метода стохастического градиентного спуска, который обеспечивает эффект неявной адаптации на основе статистических данных, описывающих процесс нестационарного теплообмена.

3. Разработан проблемно-ориентированный программный комплекс, реализующий полученные математическую модель и численный метод в виде алгоритмов на языке высокого уровня с применением гексагональной архитектуры ООП.

При решении задач **получены следующие результаты.**

1. Проанализированы “классические” численные методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в двумерной постановке. На их основе сформулирована проблема “явной” адаптации таких решений к теплофизическим параметрам нагреваемых твердых тел, а также к условиям теплообмена на их границах.

2. На примере конечно-разностного численного метода моделирования нестационарной теплопроводности в граничных условиях III-го рода были продемонстрированы основные проблемы, связанные с групповой “явной” адаптацией. Во-первых, была оценена алгоритмическая сложность конечно-разностной модели с такой адаптацией, имеющая показательный класс роста, зависящий от размеров адаптируемой группы ( $O(N \cdot P^{2+k})$ ). Во-вторых, были рассмотрены практические аспекты, ограничивающие применение групповой “явной” адаптации для частных случаев моделирования нестационарной теплопроводности.

3. Была предложена математическая модель нестационарной теплопроводности для граничных условий III-го рода на основе конечно-разностного метода решения с возможностью проводить упомянутую ранее адаптацию неявно. Для полученной модели были выведены условия алгоритмической устойчивости, гарантирующие стабильность расчетов на ЭВМ.

4. Был предложен численный метод, позволяющий проводить адаптацию неявно, используя для этого статистические сведения о нестационарном нагреве твердых тел, соответствующем граничным условиям III-го рода. Данный численный метод представляет непрерывные теплофизические коэффициенты, включая коэффициент теплообмена на границе твердого тела, как дискретные параметры, равномерно распределенные в узлах временной сети. Он включает в себя предложенный закон настройки этих параметров, а также формулы для расчета частных производных ошибок по настраиваемым параметрам. В работе доказано, что алгоритмическая сложность предложенного метода имеет более эффективный полиномиальный вид –  $O(V \cdot (N \cdot P^2 + N))$ .

5. Была выполнена апробация предлагаемой математической модели и численного метода на распространенном виде нестационарного нагрева твердых тел из стали в промышленных печах пламенного типа, тепловой процесс в которых соответствует граничным условиям III-го. В результате

апробации было установлено, что модель способна работать в режиме реального времени и имеет точность порядка 94,72% для рассмотренного случая.

6. На том же частном случае нестационарной теплопроводности были оценены статистическая модель со сложной структурой и классическая конечно-разностная модель с групповой “явной” адаптацией. Точность статистической модели составила 96,07%, точность классической модели – 88,42%. Точность статистической модели немногим выше предложенной, но она имеет абсолютно неинтерпретируемую структуру.

7. Для предложенных математической модели и численного метода были синтезированы алгоритмы, реализованные в дальнейшем на языке высокого уровня (C#) в виде проблемно-ориентированного программного комплекса с использованием гексагональной архитектуры ООП.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Парсункин, Б. Н., Андреев, С. М., Мухина, Е. Ю. Экстремально-оптимизирующее автоматизированное управление нагревом непрерывнолитых заготовок в печах проходного типа // Вестник Череповецкого государственного университета. – 2021. – №. 5 (104). – С. 22-34.
2. Андреев, С. М., Парсункин, Б. Н., Ахметов, Т. У. Совершенствование информационного обеспечения энергосберегающих режимов нагрева металла // Машиностроение: сетевой электронный научный журнал. – 2015. – №. 3 (2). – С. 3-10.
3. Парсункин, Б. Н., Андреев, С. М., Жадинский, Д. Ю., Ахметова, А. У. Оптимальные топливосберегающие режимы нагрева непрерывнолитых заготовок в методических печах // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. ГИ Носова. – 2015. – №. 3 (51). – С. 89-96.
4. Парсункин, Б. Н., Андреев, С. М., Сухонослова, Т. Г. Совершенствование автоматического управления процессом промышленного сжигания газа путем энергосберегающего пропорционирования расходов топлива и воздуха // Теория и технология металлургического производства. – 2017. – Т. 2. – №. 21. – С 21-26.
5. Парсункин, Б. Н., Самарина, И. Г. Система автоматического энергосберегающего управления на основе математической модели газодинамического режима нагревательной методической печи // Электротехнические системы и комплексы. –2017.–№. 2 (35). – С. 55-60.
6. Кургосов, Д. А., Ливадный, Н. Е., Зубарев, Ю. М. Математическая модель тепловых процессов при закалке стали // Актуальные проблемы морской энергетики. – 2019. – С. 489-494.
7. Zanolì, S. M., Pepe, C., Moscoloni, E., Astolfi, G. Data Analysis and Modelling of Billets Features in Steel Industry // Sensors. – 2022. – Т. 22. – №. 19. – С. 7333.
8. Zanolì, S. M., Pepe, C., Astolfi, G., & Moscoloni, E. Analysis and modeling of steel industry reheating furnace billets temperature // 2022 23rd International Carpathian Control Conference (ICCC). – IEEE, 2022. – С. 337-342.
9. Зарубин, В. С., Кувыркин, Г. Н., Савельева, И. Ю. Вариационная форма модели теплового взрыва в твердом теле с зависящей от температуры теплопроводностью // Теплофизика высоких температур. – 2018. – Т. 56.–№ 2. – С. 235-240.
10. Зарубин, В. С., Кувыркин, Г. Н., Савельева, И. Ю., Журавский, А. В. Условия теплового взрыва в пластине при конвективно-радиационном теплообмене // Вестник Московского государственного технического университета им. НЭ Баумана. Серия «Естественные науки». – 2020. – № 6 (93). – С. 48-59.

11. Кувыркин, Г. Н., Савельева, И. Ю., Зарубин, В. С. Математическая модель нагрева слоя полимерного диэлектрика // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. – 2019. – С. 806-813.
12. Острик, А. В., Николаев, Д. Н., Чепрунов, А. А. Моделирование комплексного теплового и механического действия потоков излучений и частиц на композитные элементы конструкций летательных аппаратов // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. – 2020. – С. 424-432.
13. Губарева, К. В., Попов, А. И., Зинина, С. А., Шульга, А. С., Чуюнов, Д. О. Моделирование процесса теплообмена в пластине с переменными теплофизическими свойствами // Научное обозрение. Технические науки. – 2020. – №. 6. – С. 52-57.
14. Сороковая, Н. Н., Коринчук, Д. Н. Математическое моделирование динамики тепломассопереноса, фазовых превращений и термодеструкции при высокотемпературной сушке биомассы // Современные энергосберегающие тепловые технологии (сушка и тепловые процессы) СЭТТ-2020. – 2020. – С. 137-144.
15. Дударева, Н. Ю., Кишалов, А. Е., Кальщикова, Р. В., Ахмедзянов, Д. А., Гапонова, А. А. Разработка методики моделирования теплового состояния поршней двигателей внутреннего сгорания // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. – 2019. – Т. 23. – №. 3 (85). – С. 46-54.
16. Литвинов, П. В., Борисов, В. А., Ведрученко, В. Р., Грязнова, З. Н., Коцюба, Я. В. Моделирование статических и термических нагрузок поршня двухтактного двигателя, модифицированного каталитическими материалами // Омский научный вестник. – 2022. – №. 4 (184). – С. 46-52.
17. Федяевский, М. Р., Алексеев, П. Д., Леухин, Ю. Л. Численное моделирование аэродинамики и конвективного теплообмена струйного модульного рекуператора // Арктические исследования: от экстенсивного освоения к комплексному развитию. – 2020. – С. 601-606.
18. Чернухин, Р. В., Долгушин, А. А., Касимов, Н. Г., Иванцовский, В. В., Лобанов, Д. В., Васильев, С. А., Мартюшев, Н. В. Обоснование расходных характеристик рекуператора для тепловой подготовки агрегатов машин и оборудования // Обработка металлов: технология, оборудование, инструменты. – 2020. – Т. 22. – №. 4. – С. 82-93.
19. Бирюков, А. Б., Гинкул, С. И., Гнитиев, П. А., Олешкевич, Т. Г. Математическое моделирование процессов тепловой обработки металла в печах с учетом окалинообразования // Сталь. – 2016. – №. 8. – С. 85-90.
20. Бирюков, А. Б., Волошин, А. И., Олешкевич, Т. Г. Математическое моделирование процесса тепловой обработки металла в печах // Сталь. – 2016. – №. 1. – С. 71-75.
21. NACHEM, E. et al. Modeling of heat transfer and turbulent flows inside industrial furnaces // Simulation Modelling Practice and Theory. – 2013. – Т. 30. – С. 35-53.

22. Hachem, E. Et al. Deep reinforcement learning for the control of conjugate heat transfer // *Journal of Computational Physics*. – 2021. – Т. 436. – С. 110317.
23. Tian, X., Wang, L. Heat conduction in cylinders: Entropy generation and mathematical inequalities // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2018. – Т. 121. – С. 1137-1145.
24. Головизнин, В. М., Самарский, А. А. Некоторые свойства разностной схемы “Кабаре” // *Математическое моделирование*. – 1998. – Т. 10. – №. 1. – С. 101-116.
25. Попов, Ю. П., Самарский, А. А. Полностью консервативные разностные схемы // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 1969. – Т. 9. – №. 4. – С. 953-958.
26. Самарский, А. А. О регуляризации разностных схем // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 1967. – Т. 7. – №. 1. – С. 62-93.
27. Дилигенская, А. Н. Решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности на основе параметрической // *Теплофизика высоких температур*. – 2018. – Т. 56. – №3. – С. 399-406.
28. Ожерелкова, Л. М., Савин, Е. С. Температурная зависимость нестационарной теплопроводности твердых тел // *Russian Technological Journal*. – 2019. – Т. 7. – №. 2. – С. 49-60.
29. Албу, А. Ф., Евтушенко, Ю. Г., Зубов, В. И. Использование оптимизационных методов второго порядка для решения обратной коэффициентной задачи в трехмерной постановке // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. – 2021. – Т. 27, – № 4. – С. 19-34.
30. Албу, А. Ф., Зубов, В. И. О восстановлении коэффициента теплопроводности вещества по температурному полю // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2018. – Т. 58. – № 10. – С. 1642-1657.
31. Панферов, В. И. Моделирование нагрева окисляющихся слябов // *Известия высших учебных заведений. Черная металлургия*. – 1994. – № 10. – С. 52-55.
32. Плешивцева, Ю. Э., Рапопорт, Э. Я. Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. – 2009. – №. 3. – С. 22-33.
33. Алифанов, О. М., Артюхин, Е. А., Ненарокомов, А. В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена // *М.: Янус-К*. – 2009. – Т. 300.
34. Панферов, В. И., Анисимова, Е. Ю., Панферов, С. В. Эффективные энергосберегающие решения при теплоснабжении зданий // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура*. – 2015. – Т. 15. – №. 4. – С. 40-48.
35. Beck, J. V., Blackwell, B., Clair, Jr C. R. S. Inverse heat conduction: Ill-posed problems. – James Beck, 1985.

36. Beck J. V., Woodbury K. A. Inverse problems and parameter estimation: integration of measurements and analysis // *Measurement Science and Technology*. – 1998. – Т. 9. – №. 6. – С. 839.
37. Shang, Z., Liao, Z., Sarasua, J. A., Billingham, J., Axinte, D. On modelling of laser assisted machining: Forward and inverse problems for heat placement control // *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. – 2019. – Т. 138. – С. 36-50.
38. Богатова, М. Ж., Чибизова, С. И. Статистическая модель нагрева металла в печах с шагающими балками // *Теплотехника и информатика в образовании, науке и производстве (ТИМ'2021)*. – Екатеринбург, 2021. – С. 19–24.
39. Zanolì, S. M., Pepe, C., Orlietti, L. Multi-Mode Model Predictive Control Approach for Steel Billets Reheating Furnaces // *Sensors*. – 2023. – Т. 23. – №. 8. – С. 3966.
40. Богатова, М. Ж., Чибизова, С. И. Статистическое моделирование температурных режимов работы нагревательных печей листовых станов горячей прокатки // *Известия высших учебных заведений. Черная Металлургия*. – 2021. – Т. 64. – №. 5. – С. 374-381.
41. Жуков, П. И., Фомин, А. В., Глущенко, А. И. Неявная адаптация сеточной модели нестационарной теплопроводности к нагреваемому веществу // *Управление большими системами: сборник трудов*. – 2022. – № 100. – С. 78-106.
42. Жуков, П. И., Фомин, А. В., Глущенко, А. И. Алгоритмическая устойчивость и сложность процесса неявной адаптации сеточной модели нестационарной теплопроводности к нагреваемому веществу // *Управление большими системами: сборник трудов*. – 2023. – № 101. – С. 39-63.
43. Жуков, П. И., Фомин, А. В., Глущенко, А. И. Сравнение модели конечных разностей и машинного обучения для задачи прогнозирования температуры заготовки, нагреваемой в проходной печи // *Управление большими системами: сборник трудов*. – 2022. – № 95. – С. 79-100.
44. Жуков, П. И., Фомин, А. В., Глущенко, А. И. Модель для прогнозирования температуры заготовки по ретроспекции ее нагрева на основе бустинга структуры «случайный лес» // *Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии*. – 2020. – Т. 18. – № 4. – С. 11-27.
45. Zhukov P., Fomin A., Glushchenko A. Comparison of finite-difference and data-based models of temperature transfer process in heating furnaces for cast billet temperature prediction // *International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency*. – IEEE, 2021. – С. 811-816.
46. Zhukov, P., Fomin, A., Glushchenko, A. On Adaptation of Third Kind Boundary Conditions for Grid Models of Nonstationary Heat Exchange // *International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*. – IEEE, 2022. – С. 1009-1013.

47. Zhukov P., Fomin, A., Glushchenko, A. Comparison of Training Efficiency of Transient Heat Conduction Mesh Model Using Different Objective Functions and Optimizers // International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency. – IEEE, 2022. – С. 301-305.
48. Zhukov P., Glushchenko A., Fomin A. Algorithmic Stability of Implicit Adaptation Process of Transient Thermal Conductivity Grid Model to Heated Material //2023 5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – IEEE, 2023. – С. 738-743.
49. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021669017 РФ. Программа для моделирования нестационарного теплопереноса в шестизонной печи нагрева: № 2021668046: заявл. 12.11.2021: опубл. 23.11.2021 / П. И. Жуков, А. И. Глущенко.
50. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020662615 РФ. Программное средство автоматической обработки технологических данных "FDWM": № 2020661938: заявл. 08.10.2020: опубл. 16.10.2020 / П. И. Жуков, А. И. Глущенко, А. В. Фомин.
51. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022683189 РФ. Модель расчета температурного поля в прямоугольном сечении с адаптивным коэффициентом теплообмена для ситуации вынужденной конвекции с переходным режимом течения: № 2022681634: заявл. 11.11.2022: опубл. 01.12.2022 / П.И. Жуков, А.И. Глущенко.
52. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022682951 РФ. Подсистема расчёта среднего времени пребывания заготовок в нагревательной печи: № 2022681630: заявл. 11.11.2022: опубл. 29.11.2022 / А. В. Фомин, П. И. Жуков.
53. Жуков, П. И. Фомин, А. В. Разработка концепции надсистемы энергоэффективного управления нагревательной печью // Труды конференции «Системы автоматизации (в образовании, науке и производстве) AS'2022», – Новокузнецк: СибГИУ, 2022. – С. 293-299.
54. Жуков, П. И., Глущенко, А. И., Фомин, А. В. Сравнение эффективности «обучения» сеточной модели нестационарной теплопроводности при различных целевых функциях // Управление большими системами: труды XVIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых. – Челябинск: ЮУрГУ, 2022. – С. 440-448.
55. Жуков П. И., Глущенко А. И. Адаптация коэффициента теплообмена для граничных условий третьего рода в конечно-разностных моделях нестационарной теплопроводности // Современные проблемы горно-металлургического комплекса. Наука и производство: материалы XVIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. - Старый Оскол: СТИ НИТУ «МИСиС», 2021. – С. 469-475.
56. Жуков, П. И., Глущенко, А. И., Фомин, А. В. Адаптация сеточной модели нестационарной теплопроводности на основе метода

- градиентного спуска // 15-я мультиконференция по проблемам управления. – СПб.: "Электроприбор", 2022. – С. 59-62.
57. Жуков, П. И., Глущенко, А. И., Фомин, А. В. Адаптация значений коэффициентов теплопереноса для сеточной модели нестационарного нагрева стали // Управление большими системами: труды XVII Всероссийской школы-конференции молодых ученых. – М.: ИПУ РАН, 2021. – С. 521-532.
58. Сарваева, Г. А., Павлов М. Р., Лаптев А. Б. Определение и прогнозирование изменения свойств полимерных композиционных материалов при высокотемпературном старении // Полимерные композиционные материалы и производственные технологии нового поколения. – 2021. – С. 114-131.
59. ЛЫКОВ А.В. Теория теплопроводности / М. 1967. Высшая школа – 600 с.
60. Самарский, А. А. Теория разностных схем. – ФМЛ, 1989.
61. Лисиенко, В. Г., Маликов, Г. К., Титаев, А. А. Метод расчета взаимных поверхностей излучения в математических моделях высокотемпературных агрегатов, основанный на дискретизации по направлениям // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2014. – Т. 57. – № 8. – С. 47–50.
62. Лисиенко, В. Г., Маликов, Г. К., Титаев, А. А. Сравнение зонального метода моделирования теплообмена излучением с методом конечных объемов на примере расчета нагрева непрерывнолитой заготовки в кольцевой печи // Современные научные достижения металлургической теплотехники и их реализация в промышленности. —Екатеринбург. – 2018. – №. 2. – С. 117-122.
63. Максимов, Д.И. Метод конечных разностей для уравнения теплопроводности в двумерной неоднородной области // Continuum. Математика. Информатика. Образование. – 2016. – №. 1. – С. 36-41.
64. Филатов, А. Н., Матюнин, А. Г., Третьяков, В. А., Шкатов, В. В. Моделирование методом конечных элементов нагрева сляба низкоуглеродистой стали в методической печи с прогнозом размера зерна аустенита // Будущее науки-2016. – 2016. – С. 157-162.
65. Лисиенко, В. Г., Маликов, Г. К., Титаев, А. А. Сравнение двух методов вычисления температуры нагрева непрерывнолитых заготовок в нагревательной печи // Теплотехника и информатика в образовании, науке и производстве (ТИМ'2019). – Екатеринбург. – 2019. – С. 112-118.
66. Касилаускайте, И. Г. Метод конечных элементов при решении задач теплопроводности // Прорывные научные исследования как двигатель. – 2015. – С. 13-16.
67. Смирнов, Е. М., Зайцев, Д. К. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Научно-технические ведомости СПбГТУ. – 2004. – Т. 2. – №. 36. – С. 70-81.

68. Бухмиров, В. В., Солнышкова, Ю. С. Зональные методы расчёта радиационного и сложного теплообмена // ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2012. – 96 с.
69. Бухмиров, В. В., Крупенников, С. А., Солнышкова, Ю. С. Модификации зонального метода для решения задач радиационного теплообмена: основные положения // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. – 2009. – №. 2. – С. 61-63.
70. Матус, П. П. Обобщение теоремы Лакса–Рябенского–Филиппова на нелинейные задачи // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2021. – Т. 65. – №. 4. – С. 391-396.
71. Ректорис, К. Вариационные методы в математической физике и технике. – Мир, 1985. – Т. 590.
72. Самарский, А. А., Вабищевич, П. Н., Гулин, А. В. Устойчивость операторно-разностных схем // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35. – №. 2. – С. 152-187.
73. Марчук, Г. И. Методы расщепления / Г. И. Марчук – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1988. – 264 с.
74. Шокин, Ю. И., Федотова, З. И. О достижениях в теории разностных схем // Вычислительные технологии. – 1999. – Т. 4. – №. 5. – С. 56-69.
75. Афондинов, А. Л., Брушлинский, К. В. ИМ Гельфанд и прикладная математика // Успехи математических наук. – 2009. – Т. 64. – №. 6 (390). – С. 181-186.
76. Станкус, С. В., Савченко, И. В., Багинский, А. В., Вербя, О. И., Прокопьев, А. М., Хайрулин, Р. А. Коэффициенты теплопроводности нержавеющей стали 12Х18Н10Т в широком интервале температур // Теплофизика высоких температур. – 2008. – Т. 46. – №. 5. – С. 795-797.
77. Горинов, О. И., Колибаба, О. Б., Габитов, Р. Н. Использование регрессионной модели для определения теплофизических свойств слоя твердых органических отходов // Состояние и перспективы развития электро-и теплотехнологии. – 2015. – С. 216-219.
78. Попов, Е. В., Дружинин, Г. М. Влияние теплофизических свойств стали на нагрев заготовок в печах // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2015. – Т. 55. – №. 1. – С. 52-55.
79. Ромм, Я. Е., Заярный, В. В. Численный эксперимент по компьютерному анализу устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений // Современные проблемы науки и образования. Текст: электронный, – 2015. – № 1(1). URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=19424> (Дата обращения 23.09.2023)
80. Стефонишин, Д. А. и др. Эффективный разностный метод численного решения уравнений агрегации с учетом трехчастичных столкновений // Вычислительные методы и программирование. – 2018. – Т. 19. – С. 261-269.
81. Драгунов, Ю. Г., Зубченко, А. С., Каширский, Ю. В. и др. Марочник сталей и сплавов. 6-е изд., стереотипное / Под общей ред. Ю.Г.

- Драгунова и А.С. Зубченко – М.: Инновационное машиностроение, 2019. – 1216 с.
82. Бреславская, Е. А., Бреславский, Д. В. Интернет-портал "марочник стали и сплавов": эффективное средство проектирования в металлургии и машиностроении // Черные металлы. – 2010. – №. 8-9. – С. 17-20.
  83. Бабичев, А. П. Бабушкина, Н. А., Братковский, А. М, Физические величины: справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат. – 1991. – 1232 с.
  84. Казанцев, Е. И. Промышленные печи. Справочное руководство для расчётов и проектирования – М.: Металлургия, 1975. – 366 с.
  85. Кикоин, И. К. Таблицы физических величин. – Рипол Классик, 1976.
  86. Мищенко, К. П. Краткий справочник физико-химических величин. – 1965.
  87. Макарова, Л. Л., Рылкина, М. В. Краткий справочник физико-химических величин. – 1996.
  88. Чиркин, В. С. Теплофизические свойства материалов. – Рипол Классик, 2013.
  89. Акимов, А. И., Акимов, И. А., Мукашев, А. А., Лацвеев, А. Н. Уточнение значений конвективных коэффициентов теплоотдачи, входящих в граничные условия третьего рода задачи теплопроводности на основе их обратных задач // Научно-технический вестник Поволжья. – 2020. – №. 10. – С. 55-58.
  90. Васильев, В. И., Кардашевский, А. М., Попов, В. В. Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности с неоднородными граничными условиями Дирихле // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2022. – Т. 25. – №. 4. – С. 27-41.
  91. Дмитриев, А. В., Зинуров, В. Э., Гумерова, Г. Х. Оценочный расчет процесса теплообмена в камере сгорания при сжигании природного газа // Вестник технологического университета. – 2018. – Т. 21. – №. 2. – С. 99-103.
  92. Лущик, В. Г., Решмин, А. И. Интенсификация теплообмена в плоском безотрывном диффузоре // Теплофизика высоких температур. – 2018. – Т. 56. – №. 4. – С. 589-596.
  93. Пшенин, В. В., Фидусь, А. И. Критериальное уравнение для числа Нуссельта при конвекции в горизонтальных цилиндрических подземных емкостях // OPEN INNOVATION. – 2019. – С. 42-45.
  94. Дмитриев, О. С., Живенкова, А. А. Численно-аналитическое решение нелинейной коэффициентной обратной задачи теплопроводности // Инженерно-физический журнал. – 2018. – Т. 91. – №. 6. – С. 1426.
  95. Дилигенская, А. Н., Рапопорт, Э. Я. Метод минимаксной оптимизации в коэффициентной обратной задаче теплопроводности // Инженерно-физический журнал. – 2016. – Т. 89. – №. 4. – С. 1007-1012.
  96. Панин, С. В. Моделирование и прогнозирование температур перегрева образцов пвх-профиля // Труды ВИАМ. – 2022. – №. 3 (109). – С. 135-144.

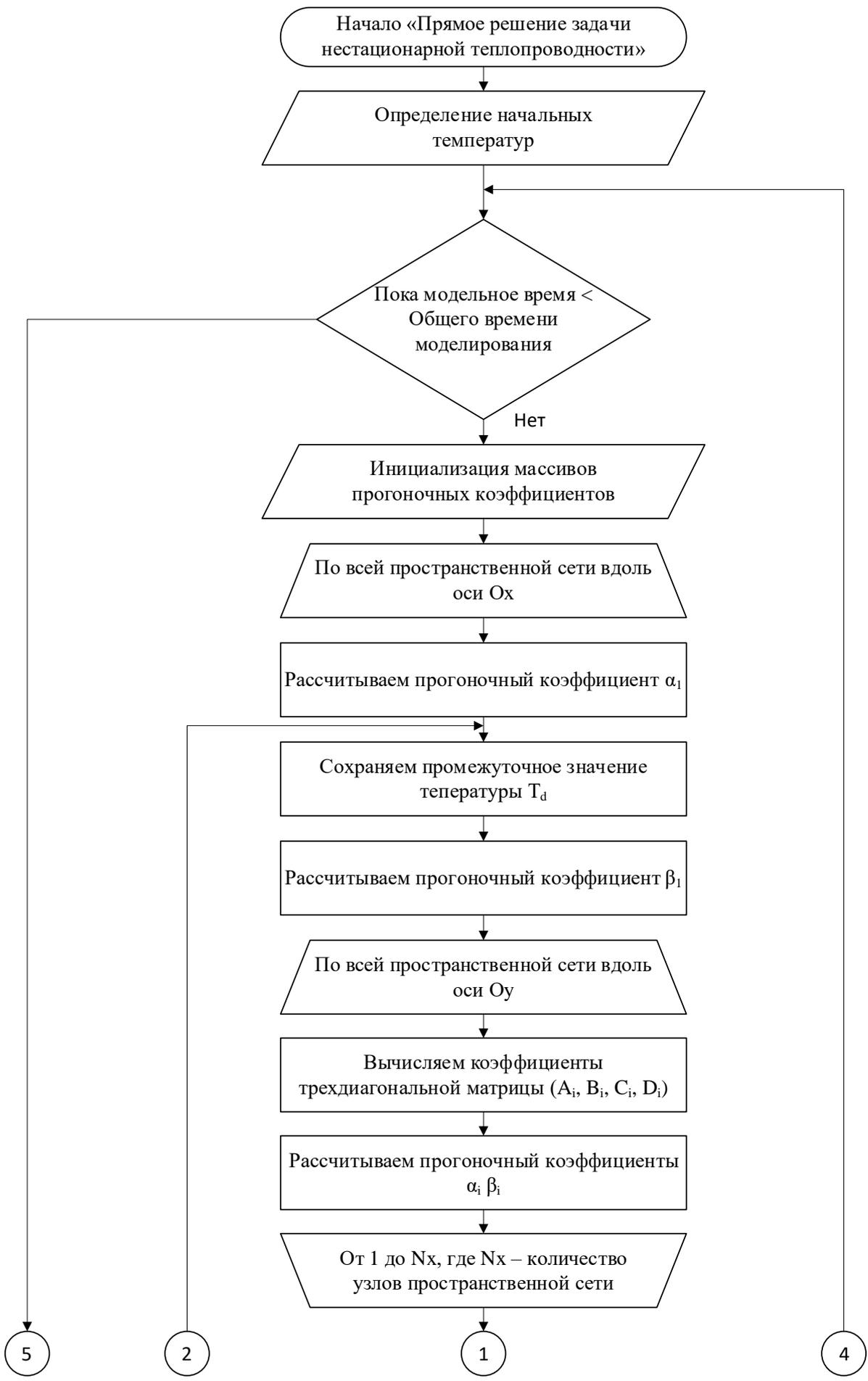
97. Полуянович, Н. К., Дубяго, М. Н. Прогнозирование ресурса кабельных линий с использованием метода искусственных нейронных сетей // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2019. – №. 3 (205). – С. 51-62.
98. Рябчиков, М. Ю., Рябчикова, Е. С., Новак, В. С. Гибридная модель для упреждающего управления температурой металла при горячем оцинковании стальной полосы // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2023. – Т. 24. – №. 8. – С. 421-432.
99. Vinayak, R. K., Gilad-Bachrach, R. Dart: Dropouts meet multiple additive regression trees // Artificial Intelligence and Statistics. – PMLR, 2015. – С. 489-497.
100. Буланов, С. Г. Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе покомпонентного сопоставления знаков решения, первой и второй производной решения // Международный научно-исследовательский журнал. – 2021. – №. 9 (111). – С. 11-16.
101. Meyer, G. P. An alternative probabilistic interpretation of the Huber loss // Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2021. – С. 5261-5269.
102. Zeiler, M. D. Adadelta: an adaptive learning rate method // arXiv preprint arXiv:1212.5701. – 2012.
103. Lydia, A., Francis, S. Adagrad—an optimizer for stochastic gradient descent // Int. J. Inf. Comput. Sci. – 2019. – Т. 6. – №. 5. – С. 566-568.
104. Гэри, М. т др. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – Мир, 1982. – Т. 416.
105. Кнут, Д. Э. Искусство программирования: учебное пособие пер. с англ. – 3-е изд., испр. и доп.. – М.: Вильямс, 2012.
106. Вержбицкий, В. М. Основы численных методов – Изд. 5-е. – Москва-Берлин: Директ-Медиа, 2021. – 849 с.
107. Дегтярёв, С. Л. Об устойчивости разностных схем с переменными весами для одномерного уравнения теплопроводности // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1994. – Т. 34. – №. 8-9. – С. 1316-1322.
108. Дегтярев, С. Л. Устойчивость локально неявных разностных схем для двумерного нестационарного уравнения теплопроводности // Препринты ИПМ им. МВ Келдыша. – 1994. – №. 76. – С. 1-24.
109. Еременко, Ю. И., Полещенко, Д. А., Глущенко, А. И. К вопросу о разработке базы правил настройки параметров ПИ-регулятора при управлении нагревательными металлургическими объектами // Известия Высших Учебных Заведений. Черная Металлургия. – 2016. – Т. 58. – №. 11. – С. 846-850.
110. Khaled, W., Lin, J., Han, Z., Zhao, Y., Hao, H Test for heteroscedasticity in partially linear regression models // Journal of Systems Science and Complexity. – 2019. – Т. 32. – С. 1194-1210.

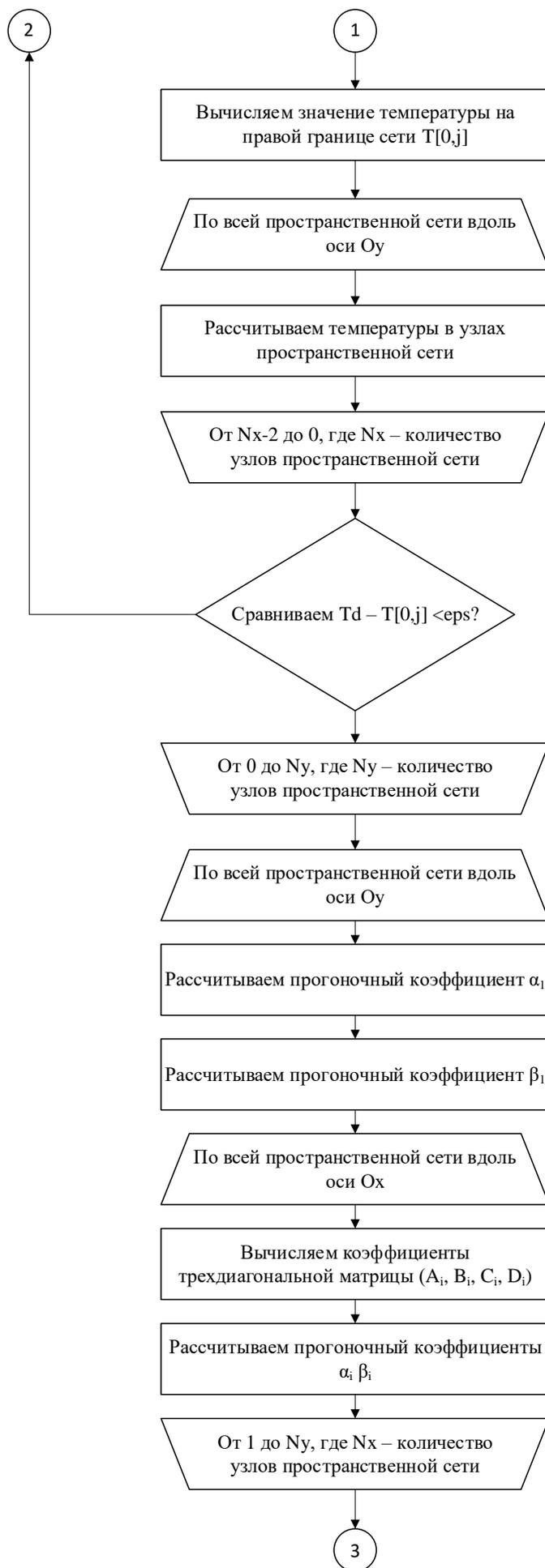
111. Митькин С. Б. Автоматное программирование на языке ДРАКОН // Программная инженерия. – 2019. – Т. 10. – №. 1. – С. 3-13
112. Madasu, V. K., Venna, T. V. S. N., Eltaeib, T. SOLID Principles in Software Architecture and Introduction to RESM Concept in OOP //Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST). – 2015. – Т. 2. – №. 2. – С. 3159-0040.

Алгоритмы работы программного комплекса



Рис. А.1 – Обобщенный алгоритм работы программы





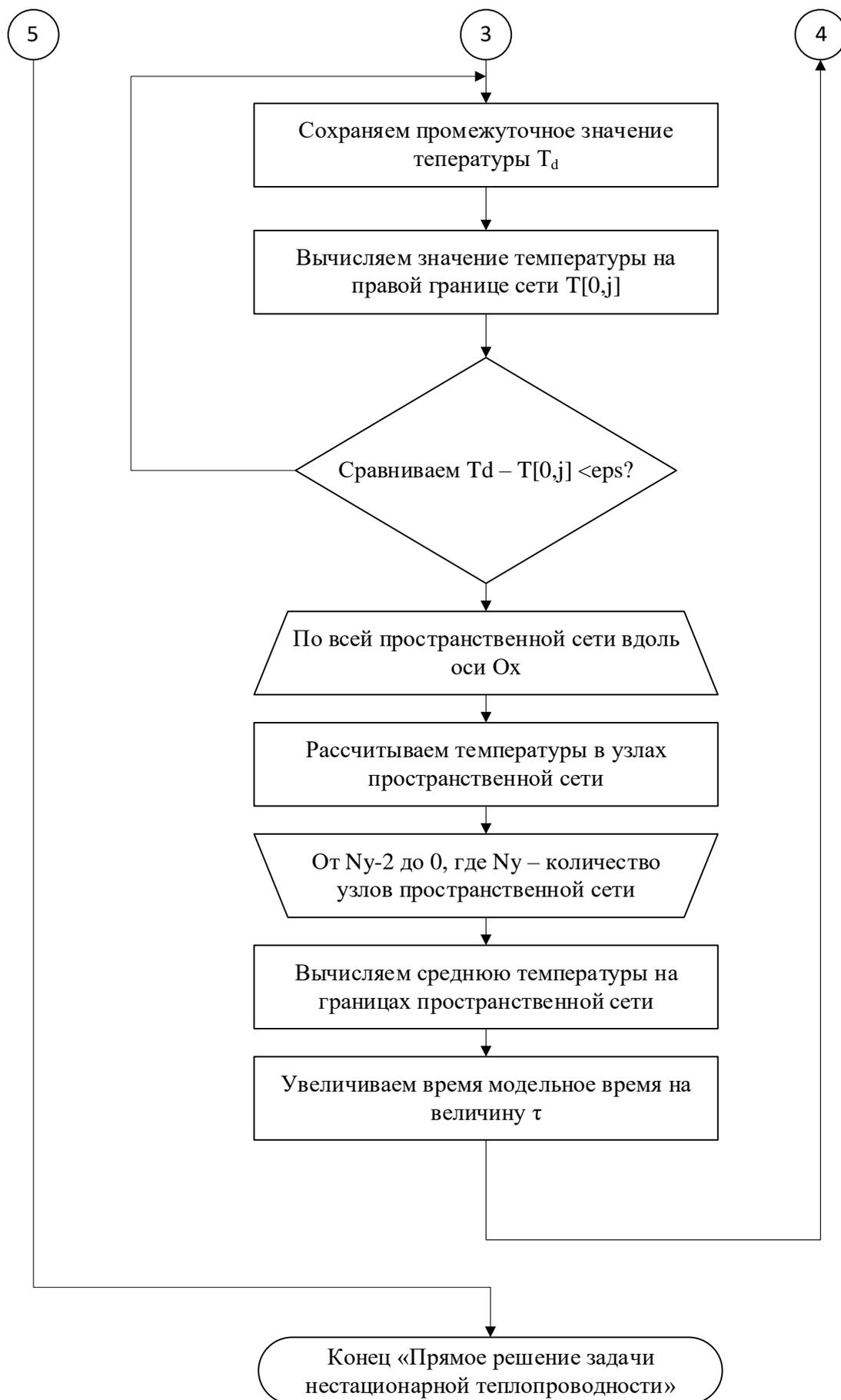


Рис. А.2 – Алгоритм прямого решения для модели нестационарной теплопроводности



Рис. А.3 – Обобщенный алгоритм работы программы с подпрограммой адаптивного расчета коэффициента теплообмена

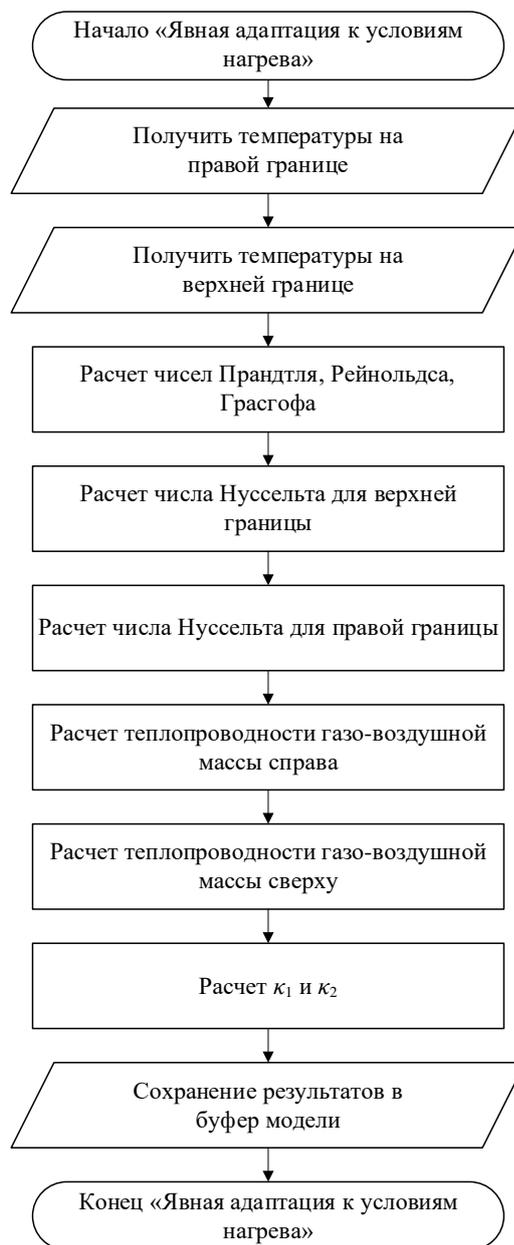


Рис. А.4 – Алгоритм “явной” адаптации к условиям нагрева



Рис. А.5 – Основной алгоритм программного комплекса с численным методом неявной адаптации нестационарной теплопроводности

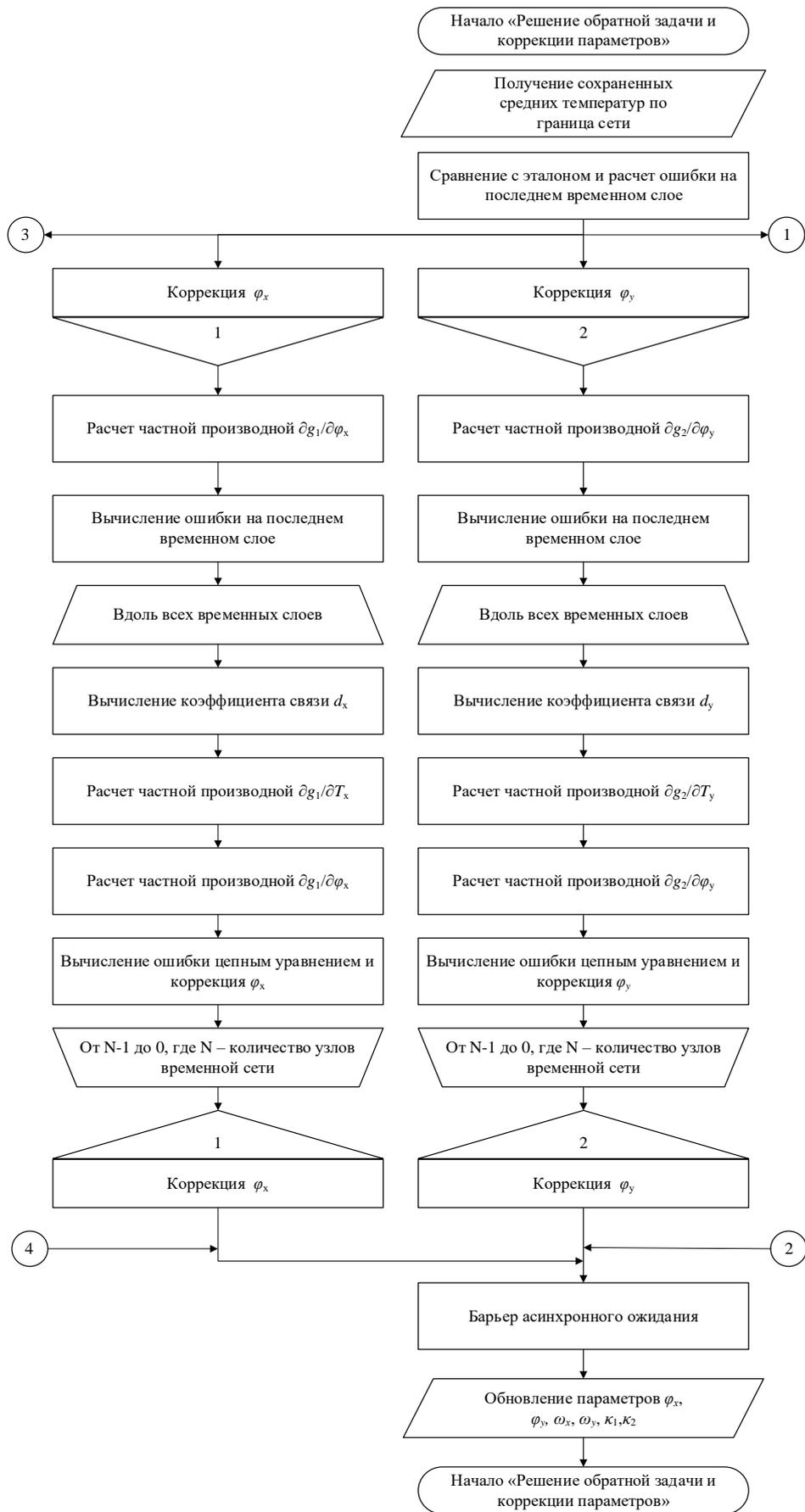


Рис. А.6.1– Алгоритм решения обратной задачи с коррекцией параметров

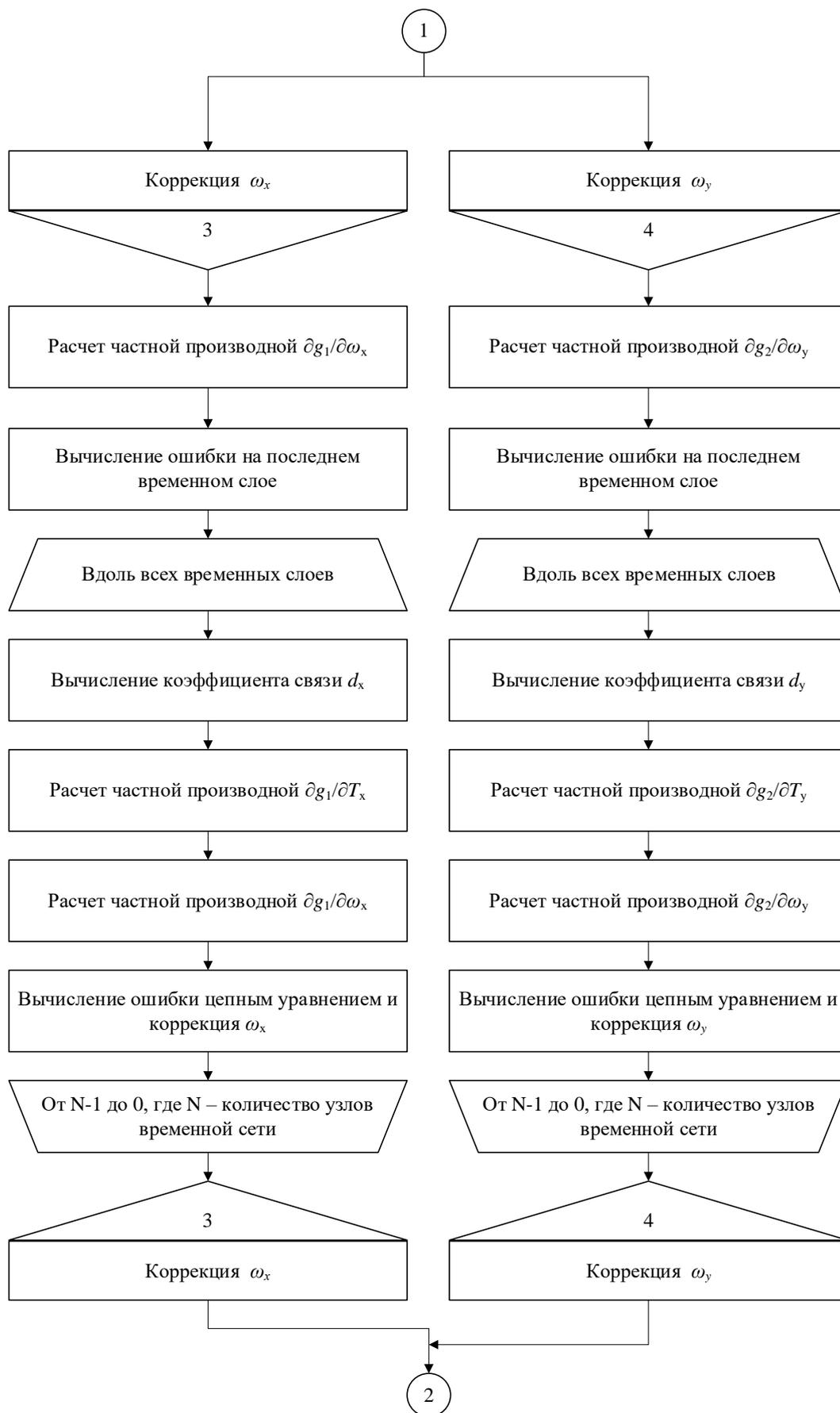


Рис. А.6.2 – Продолжение алгоритма решения обратной задачи с коррекцией параметров

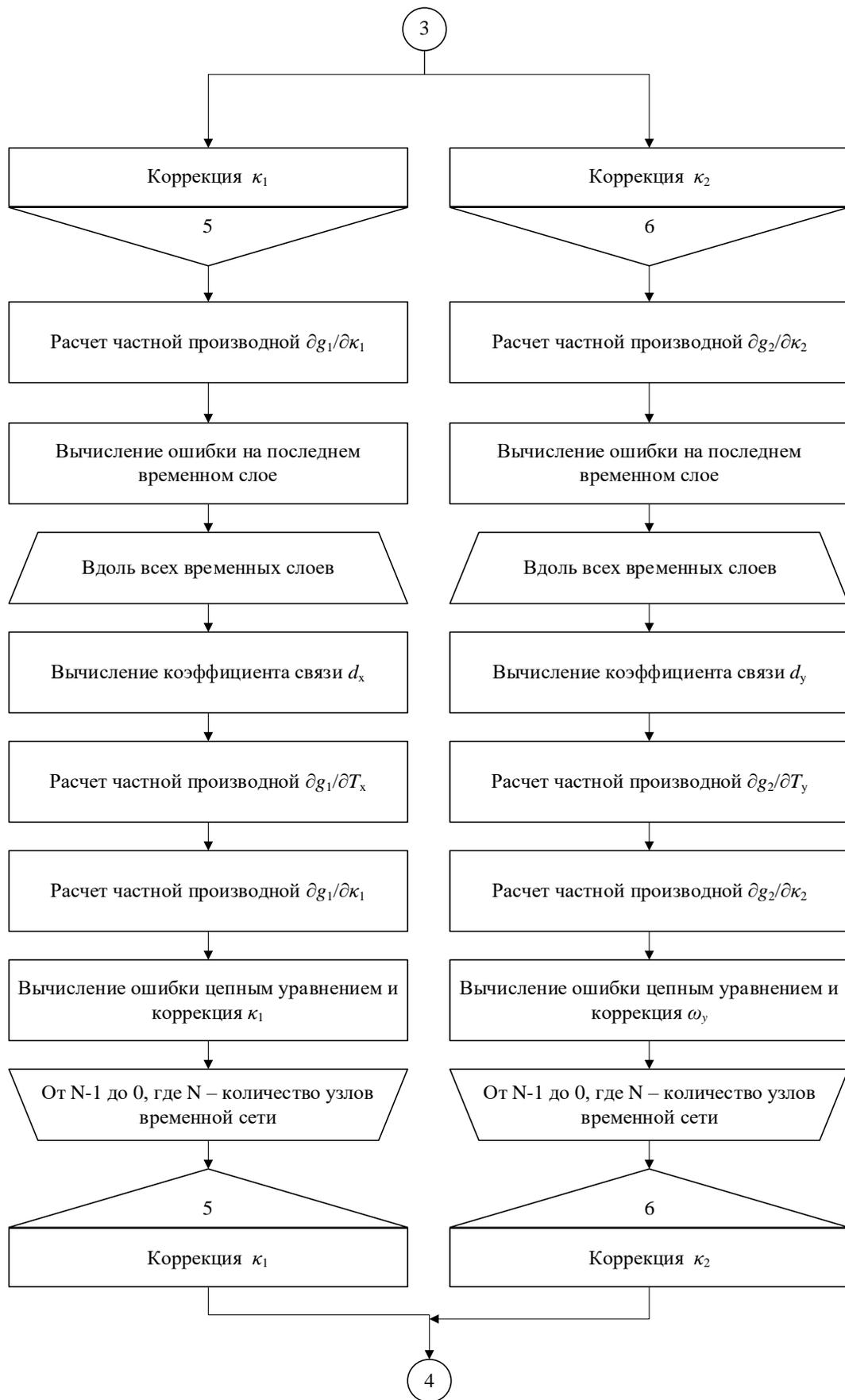


Рис. А.6.3 – Продолжение алгоритма решения обратной задачи с коррекцией параметров

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Акты об использовании результатов работы

Утверждаю

Заместитель директора по науке и  
инновациям СТИ НИТУ «МИСиС»  
д.т.н., Кожухов А.А.



2023г.

### АКТ

об использовании в учебном процессе материалов кандидатской диссертации  
по тематике моделирование процесса нестационарного нагрева твердого тела с  
неявной адаптацией к его теплофизическим параметрам  
ассистента кафедры «Автоматизированные и информационные системы  
управления им. Ю.И. Еременко»  
Жукова Петра Игоревича

Результаты исследований, полученные Жуковым П.И. и изложенные в  
диссертационной работе, внедрены в учебный процесс при реализации  
образовательных программ по подготовке бакалавров по направлению 09.03.02 –  
«Информационные системы и технологии» и магистров по направлению 15.04.04 –  
«Автоматизация технологических процессов и производств» в рамках следующих  
дисциплин:

- «Программирование на языках высокого уровня» (09.03.02);
- «Методы адаптивного управления» (15.04.04).

Заместитель директора  
СТИ НИТУ «МИСИС»  
по учебно-методической работе

д.э.н., профессор Ильичева Е.В.

И.О. заведующего кафедрой АИСУ  
им. Ю.И. Ерёменко  
СТИ НИТУ «МИСИС»

к.т.н., доцент Полежаенко Д.А.

## АКТ

об использовании результатов исследований Жукова П.И., направленных на решение актуальной научно-технической проблемы повышения эффективности работы нагревательных многозонных печей за счет разработки моделей прогнозирования температуры нагрева заготовки с неявной адаптацией к нагреваемому веществу и условиям нагрева, выносимых на защиту кандидатской диссертации

АО «Оскольский электрометаллургический комбинат имени А.А. Угарова» подтверждает, что следующие результаты, полученные лично Жуковым П.И. в рамках выполнения исследований, являются актуальными и представляют практический интерес: разработан (*i*) программный комплекс для прогнозирования температуры нагрева заготовки, основанный на (*ii*) математической модели нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией к нагреваемому веществу и условиям нагрева и (*iii*) численном методе настройки параметров такой модели. Применение предложенных Жуковым П.И. подходов позволяет не проводить дополнительных процедур настройки программного комплекса при прогнозировании нагрева заготовок различных «марок» сталей.

Предложенная модель прогнозирования в составе программного комплекса была апробирована на данных действующего технологического процесса порядка 5000 заготовок, прошедших нагрев в печах нагрева СПЦ-1. В результате точность прогнозной модели составила 13,2°C от реальных данных, что является достаточным с точки зрения технологии.

Указанные результаты потенциально дают возможность решать некорректную обратную задачу оптимизации потребления энергоресурсов тепловым агрегатом за счет ступенчатого изменения входных данных (уставок) и сравнения выхода модели с желаемым эталоном. В дальнейшем решение такой некорректной задачи позволит строить надсистемы оптимизации расхода топлива для теплового агрегата, обеспечивающие удержание температуры заготовок в допустимом диапазоне и позволяющие повысить энергоэффективность работы печи.

Перечисленные результаты, на наш взгляд, являются ощутимым вкладом в развитие систем управления процессами термообработки металла и его последующего проката, что позволит:

1) снизить потребление энергоресурсов методическими многозонными печами, применяемыми в сортопрокатных цехах за счет вычисления оптимальных уставок локальных контуров регулирования температурой в зонах;

2) сократить время компенсации внешних возмущений, вызванных изменением скорости работы прокатного стана за счет прогнозирования ожидаемой температуры нагрева заготовки при изменении скорости её движения через рабочее пространство печи (в ситуациях увеличения или уменьшения темпа проката).

АО «Оскольский электрометаллургический комбинат» рассматривает возможность поэтапного внедрения в производство представленных к защите результатов исследования Жукова П.И. при модернизации существующих систем управления технологическими агрегатами.

Технический директор



П.В. Гулов